
Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra fyziky

Statistické vlastnosti dopravní mikrostruktury

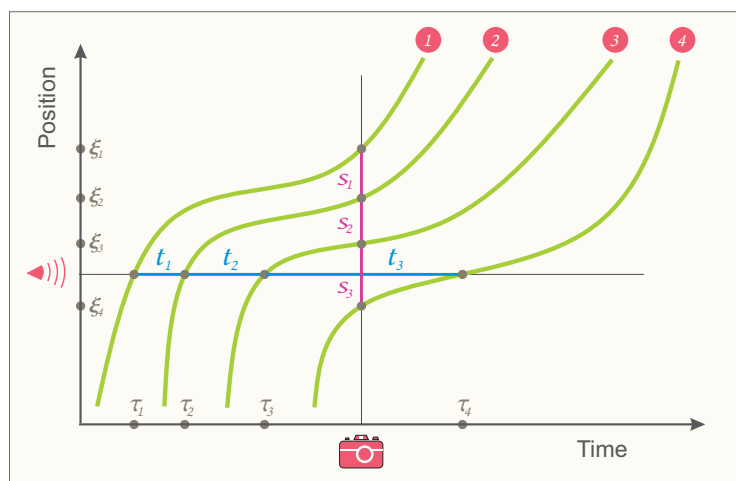
Seminární práce z předmětu Technické aplikace fyziky

Autor: Mgr. Michaela Krbálková
Studijní obor: Didaktika fyziky
Studium: doktorské

Úvod

Počátky teorie dopravního proudu lze datovat do 30. let minulého století. Obliba automobilismu postupně narůstala a s ní i počet vozidel na komunikacích. Při pohybu několika málo vozidel na jistém úseku silnice nebo dálnice nebyl řidič při jízdě ostatními vozidly prakticky nijak omezován. Při vzrůstajícím počtu vozidel však nastávaly situace, jež jsou pro současné řidiče denním chlebem - dopravní kongesce způsobené nejčastěji pomalejším vozidlem, které nebylo možné předjet. Tento stav vyvolal v oblasti dopravního inženýrství potřebu popsat a kvantifikovat dopravní proud i související dopravní veličiny a s jejich pomocí získat informaci o kapacitě dané komunikace. Tyto údaje byly samozřejmě neméně důležité i při projektování nových dálnic a křižovatek. První relevantní popis dopravního toku na dálnici provedl ve svých studiích Bruce D. Greenshields, viz [1], [2].

Fundamentální veličinou je pro teorii dopravního proudu a dopravní aplikace odstup vozidel. Lze si ho zjednodušeně představit jako vzdálenost mezi předními (nebo zadními) nárazníky dvou následujících vozidel. Odstupy zřejmě charakterizují rozložení vozidel na silnici a jsou úzce spjaty s významnými makroskopickými dopravními veličinami - dopravní intenzitou a hustotou. V odstupech dvou sousedních vozidel se také odráží chování řidiče sledujícího vozidla, tedy reakce řidiče na způsob jízdy předcházejícího vozidla. Tato veličina popisuje parametry makroskopického dopravního proudu i mikroskopické chování jednotlivých vozidel zároveň. Jednoduchou představu o určování odstupů (či světlostí) můžeme získat na obr. 1.



Obrázek 1: Znázornění trajektorií 4 vozidel a prostorových i časových odstupů mezi vozidly

Každá trajektorie znázorňuje pozice jednoho vozidla (např. na daném úseku dálnice) v závislosti na čase. Pozorujeme-li průjezd vozidel (jejich předních nebo zadních nárazníků) pevně zvoleným bodem, získáme časové odstupy t_1, t_2, t_3 . Pokud bychom naopak studovali vzdálenosti vozidel v konkrétním okamžiku, dostaneme prostorové odstupy s_1, s_2, s_3 .

Odstupy vozidel na reálných komunikacích jistě nejsou konstantní, což dokládají četná dopravní měření. Ovlivňujících faktorů je několik, jedním z hlavních důvodů může být odlišné vnímání podnětu jednotlivými řidiči či jejich odlišné reakce. Stojíme tak před otázkou, zda lze pro fyzikální systém dopravního proudu použít popis deterministický či stochastický. Chování každého řidiče je náhodilé, náhodné, nemůžeme s jistotou o žádném vozidle říci, v jaké pozici se bude nacházet za okamžik, deterministický přístup tedy aplikovat nelze. Zjevně má tedy smysl zkoumat sys-

tém z pohledu stochastického a hledat statistické rozdělení odstupů, jež popisuje pravděpodobnost výskytu konkrétní hodnoty odstupu, případně intervalu odstupů. Za tímto účelem byla navržena a publikována řada distribučních modelů. První zdokumentovaný návrh modelu statistiky odstupů pro reálný dopravní tok pochází ze 30. let minulého století [3] a využívá normální a exponenciální rozdělení. Touto prací se následně inspirovalo mnoho dalších autorů, viz [5], [6], [7], [4], včetně současníků [8], [9]. Nejprve se jednalo spíše o ad hoc modely, později se objevily snahy predikovat statistické vlastnosti dopravní mikrostruktury modifikací známých fyzikálních a matematických modelů. Přistupovalo se tak k různým třídám známých distribucí (exponenciální, posunutá exponenciální, Erlangovo, Gamma, log-normální či GIG rozdělení) a jejich aplikaci na empirická data. Na poli modelování odstupů vozidel (Vehicular Headway Modeling - VHM), jak se tato základní disciplína fyziky dopravy označuje, i v současné době probíhá intenzivní výzkum. Podrobný přehled historického vývoje statistického dopravního modelování včetně velmi názorného schématu uvádí práce [10].

Základní pojmy a veličiny dopravního proudu

Dynamika vozidel je komplexní vědecká disciplína zahrnující mnoho zajímavých odvětví. Jedním z nich je právě Vehicular Headway Modeling (VHM), která analyzuje a předpovídá změny dopravní mikrostruktury vynucené vnějšími vlivy (hustota provozu, intenzita nebo průměrná rychlost). Typickými představiteli dopravních mikroveličin jsou individuální rychlost, časový a prostorový odstup (*headway*) nebo časová a prostorová světlost (*clearance*).

Z pohledu matematiky představují všechny tyto veličiny náhodné veličiny. Můžeme je charakterizovat hustotou pravděpodobnosti (pro odstup nebo světlosti), která patří do určité skupiny distribucí. Parametry těchto distribucí se v průběhu času rychle mění, a proto jsou výrazně závislé na aktuálních hodnotách hustoty ρ , intezity I a průměrné rychlosti V dopravního proudu. Tato skutečnost vylučuje možnost použití standardních statistických postupů na kompletní datové záznamy. Vyžaduje naopak použití komplexních metod aplikovaných na dílčí vzorky datového záznamu.

Typický vzorek dopravních dat

Pro měření vlastností jednotlivých vozidel v dopravním proudu existuje mnoho technologií. Obvykle jsou rozděleny do dvou kategorií:

- *intrusivní* (indukční smyčky, piezoelektrické kabely, aktivní infračervené senzory atd.)
- *neintrusivní* (pasivní infračervené senzory, detekční drony, ultrazvukové senzory, zpracování obrazu, atd).

Pokud je však cílem analyzovat rozsáhlou množinu údajů (tzv. *Big Data*), většina těchto metod není vhodná, protože poskytují pouze omezené množství dat. Naproti tomu dvousmyčkové indukční detektory, které jsou běžně dostupné, tento nedostatek nemají. Proto v dalším textu uvažujeme data získaná pomocí magnetických smyček nebo obdobné technologie. Dvousmyčkové indukční detektory se řadí mezi intrusivní měřicí metody. Umístí se pod vozovku a fungují na principu změny efektivního napětí LC obvodu, kdy průjezd vozidla způsobí jeho pokles. Ze změny elektromagnetického pole dvousmyčky lze pak vyvodit požadované dopravní mikroveličiny. Detektory dokáží přímo měřit čas protnutí vstupní linie detektoru a čas protnutí výstupní linie detektoru (opuštění detektoru) viz obr. 2, rychlost vozidel a jejich délku.

Typickým atributem dat, která jsou získávána výše uvedeným způsobem, je to, že byla měřena ve stejné časově neměnné pozici (tzv. *linie detektoru*). Ve schématu na obr. 1 takovou linii detektoru označuje vodorovná čára a symbol radaru. Uvažujme nyní dopravní proud v jednom pruhu (bez újmy na obecnosti). Pak mají charakteristické výstupy dopravních měření zřejmě následující tvar

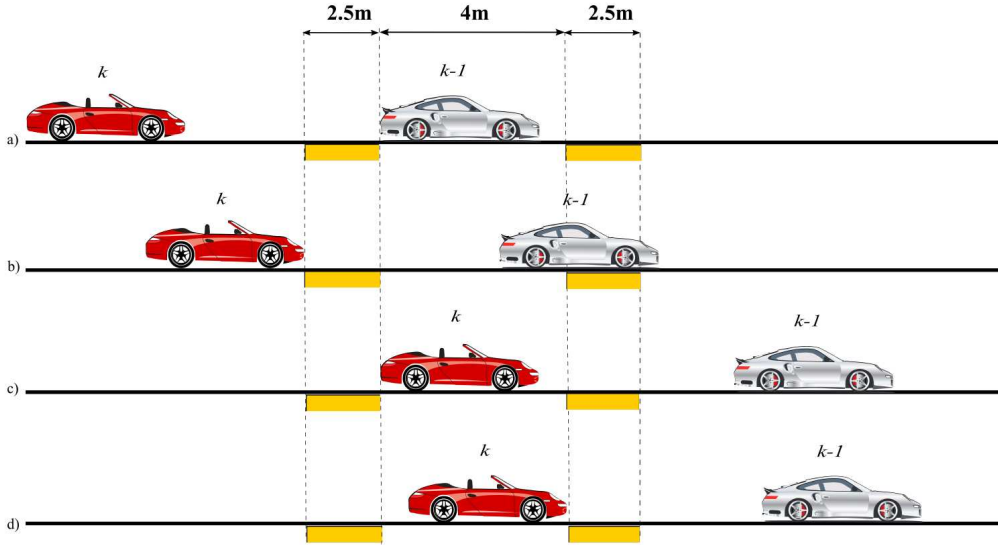
$$T^{(in)} = \left\{ \tau_k^{(in)} \in \mathbf{R} \mid k \in \hat{\mathbf{N}} \wedge \tau_{k-1}^{(in)} < \tau_k^{(in)} \wedge \tau_0^{(in)} := 0 \right\},$$

$$T^{(out)} = \left\{ \tau_k^{(out)} \in \mathbf{R} \mid k \in \hat{\mathbf{N}} \wedge \tau_{k-1}^{(in)} < \tau_{k-1}^{(out)} \leq \tau_k^{(in)} < \tau_k^{(out)} \wedge \tau_0^{(out)} := 0 \right\},$$

$$\Upsilon = \left\{ v_k \in \mathbf{R}_0^+ \mid k \in \hat{\mathbf{N}} \right\},$$

$$\Lambda = \left\{ \ell_k \in \mathbf{R}^+ \mid k \in \hat{\mathbf{N}} \right\},$$

kde $T^{(in)}$ a $T^{(out)}$ jsou množiny okamžiků τ_k , kdy přední/zadní nárazník k -tého vozidla protnul linii detektoru a Υ a Λ udávají rychlosti v_k a délky ℓ_k jednotlivých vozidel. Analogicky lze tyto soubory zavést pro libovolný jízdní pruh.



Obrázek 2: Schématické znázornění typických výstupů z měření dopravního proudu prováděných za pomoci magnetické indukční dvousmyčky. (a) $\tau_{k-1}^{(a)}$ čas, kdy zadní nárazník $(k - 1)$ -ho vozidla přetnul výstupní hranu 1. detektoru. (b) $\tau_k^{(b)}$ čas, kdy přední nárazník k -tého vozidla přetnul vstupní hranu 1. detektoru. (c) $\tau_k^{(c)}$ čas, kdy zadní nárazník k -tého vozidla přetnul výstupní hranu 1. detektoru. (d) $\tau_k^{(d)}$ čas, kdy přední nárazník k -tého vozidla přetnul vstupní hranu 2. detektoru. Převzato z [11].

Je-li při měření dvousmyčkou k dispozici navíc technologie zpracování obrazu, lze získat další soubory dat

$$\Xi^{(front)} = \left\{ \xi_k^{(front)} \in \mathbf{R} \mid k \in \hat{\mathbf{N}} \wedge \xi_k^{(front)} < \xi_{k-1}^{(front)} \wedge \xi_0^{(front)} := +\infty \right\},$$

$$\Xi^{(rear)} = \left\{ \xi_k^{(rear)} \in \mathbf{R} \mid k \in \hat{\mathbf{N}} \wedge \xi_k^{(rear)} < \xi_k^{(front)} \leq \xi_{k-1}^{(rear)} < \xi_{k-1}^{(front)} \wedge \xi_0^{(rear)} := +\infty \right\}.$$

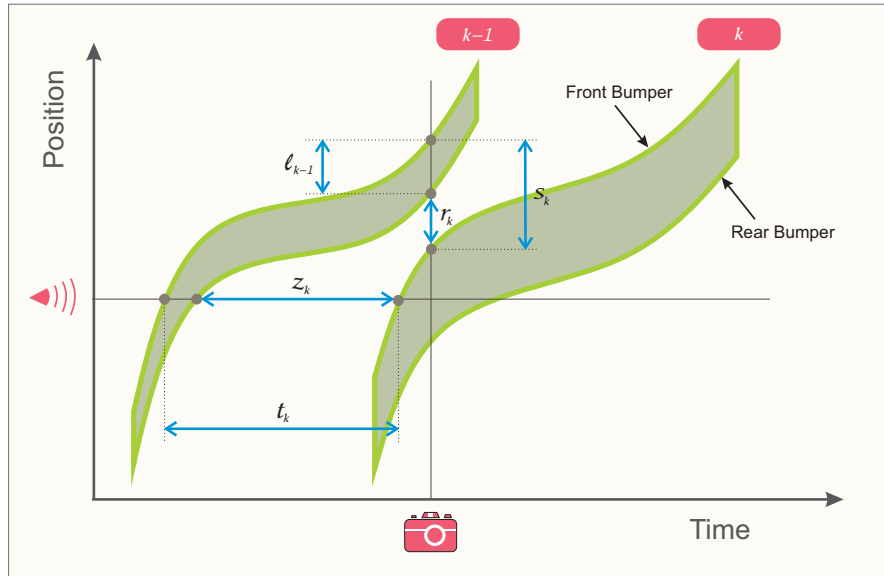
Vyjadřují údaje o pozici předních/zadních nárazníků v konkrétním čase. Tento zdvojený způsob měření se však provádí jen v ojedinělých případech, takže aktuální pozice ξ_k (na rozdíl od časových okamžiků τ_k) patří k nepřímo určeným (odvozeným) dopravním veličinám. Časové údaje τ_k , rychlosti v_k a délky ℓ_k vozidel proto označujeme jako *primární veličiny*, zatímco aktuální umístění ξ_k se označují jako *sekundární veličiny*. Primární veličiny jsou přímo měřitelné detektorem, a tudíž nejsou ovlivněny žádnou systematickou chybou.

Náhodná proměnná z pohledu VHM

Časový odstup (time headway) se v oblasti VHM obvykle definuje jako časový interval mezi detekcí předního (resp. zadního) nárazníku vedoucího vozidla a detekcí předního (resp. zadního) nárazníku následujícího vozidla. *Prostorovým odstupem* (space headway) se analogicky rozumí vzdálenost mezi dvěma předními nárazníky nebo dvěma zadními nárazníky dvou následujících vozidel měřená v daném okamžiku. Kromě veličiny odstup vozidel (headway) VHM často pracuje s pojmem *světlosti vozidel* (clearance).

Časová světlost (time clearance) představuje časový interval mezi dvěma následujícími událostmi: 1) zadní nárazník předchozího vozidla protíná linii detektoru; 2) přední nárazník referenčního

vozidla protíná linii detektoru. *Prostorová světlost* (distance clearance) je analogicky definována jako mezera mezi vozidly měřená v daném čase. Tyto charakteristiky ilustrují obr. 1 a obr. 3.



Obrázek 3: Charakteristiky dopravního proudu získané za pomoci magnetické indukční dvousmyčky (z_k, t_k) nebo metodami zpracování obrazu (r_k, s_k).

Nastínili jsme podstatu typických výstupů dopravních měření, nyní zavedeme výše zmíněné pojmy více formálně. Empirické hodnoty *časového odstupu* t_k , resp. *časové světlosti* z_k definuje vztah

$$t_k := \tau_k^{(in)} - \tau_{k-1}^{(in)}, \quad z_k := \tau_k^{(in)} - \tau_{k-1}^{(out)}.$$

Prostorový odstup s_k , resp. *prostorová světlost* r_k jsou pak dány vztahem

$$s_k := \xi_{k-1}^{(front)} - \xi_k^{(front)},$$

resp.

$$r_k := \xi_{k-1}^{(rear)} - \xi_k^{(front)}.$$

Časové odstupy/světlosti nejsou, jak již bylo zmíněno, zatíženy žádnou systematickou chybou. Zde je však nutné si uvědomit, že rovnosti pro odvození prostorových veličin $s_k = v_k t_k$, $r_k = v_k z_k$ jsou přesně platné pouze tehdy, když rychlost v_k je po dobu trvání časového intervalu $[\tau_{k-1}^{(in)}, \tau_k^{(in)}]$ konstantní. Pravděpodobnost, že tato podmínka bude splněna, není vysoká, a to především v oblastech s velkými časovými odstupy (tj. v oblastech s malou hustotou provozu), kde platí nerovnice $\tau_k^{(in)} \gg \tau_{k-1}^{(in)}$. To znamená, že měření dvousmyčkou (bez dalšího zpracování videa/fotografie) generuje časové odstupy a světlosti jako primární proměnné, zatímco prostorové odstupy a světlosti (s přihlédnutím k metodě sběru dat) představují sekundární proměnné a jejich přibližné hodnoty $s_k \approx v_k t_k$, $r_k \approx v_k z_k$ jsou nepřesné.

Stochastická reprezentace odstupů vozidel

Všechny veličiny zavedené v předchozí sekci představují z matematického hlediska nezáporné spojité náhodné proměnné, a jsou proto charakterizovány standardním statistickým popisem, tedy

související hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí (kumulovanou hustotou pravděpodobnosti).

Uvažujme nyní posloupnost $(X_k)_{k=1}^N$ náhodných proměnných téhož typu (světlost, odstup). Ze statistického hlediska reprezentují empirické odstupy x_k jednotlivé realizace náhodných proměnných X_k , a lze tedy pomocí standardních statistických metod modelovat distribuce příslušné náhodným proměnným X_k . Obecně akceptovaný předpoklad VHM uvádí, že X_1, X_2, \dots, X_N podléhají identickému rozdělení, pokud se jedná o analýzu homogenního dopravního toku, kde jsou makroskopické veličiny (*stavové proměnné*) neměnné v čase a nákladní vozidla se v něm vyskytují pouze zřídka. Pro jisté zjednodušení se dříve využívala domněnka, že rozdělení odpovídající proměnným X_1, X_2, \dots, X_N jsou identická a nezávislá. V mnoha analytických studiích to představuje užitečný (a zjednodušující) předpoklad, nicméně ve skutečnosti je tato domněnka mylná. Korelace mezi jednotlivými odstupy jsou podstatné a svědčí o výrazné interakci mezi řidiči, viz např. [12].

Makroskopické charakteristiky

Tři základní fázové proměnné popisující makroskopický stav souboru vozidel jsou

- *dopravní hustota* $\rho(\xi, \tau)$,
- *dopravní intenzita* $I(\xi, \tau)$,
- *průměrná rychlost dopravního proudění* $V(\xi, \tau)$.

Stav dopravního systému je těmito 3 veličinami plně určen. Pro jejich korektní zavedení nejprve zadefinujeme pojem *vyhlazeného počtu částic*. Vydeme ze souboru bezrozměrných vozidel jedoucích za sebou v jednom pruhu M , která se v daný okamžik τ nacházejí na pozicích $\alpha_1(\tau) > \alpha_2(\tau) > \dots > \alpha_M(\tau)$. Nechť $p(x|\sigma) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ je libovolná hustota pravděpodobnosti o střední hodnotě $\mu = 0$ a směrodatné odchylce σ . Po výběru vhodné generující hustoty pravděpodobnosti lze zavést *vyhlazený počet částic* rovnicí

$$N(\xi, \tau) := \int_{-\infty}^{\xi} \sum_{k=1}^M p(y - \alpha_k(\tau)|\sigma) dy.$$

Za generující hustotu pravděpodobnosti se často volí hustota normálního rozdělení

$$p(x|\sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

z níž pro vyhlazený počet částic plyne konkrétní tvar

$$N(\xi, \tau) := \int_{-\infty}^{\xi} \sum_{k=1}^M \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \alpha_k(\tau))^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Pomocí vyhlazeného počtu částic lze definovat *dopravní hustotu* a *dopravní intenzitu* jako

$$\rho(\xi, \tau) := \frac{\partial N(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad I(\xi, \tau) := -\frac{\partial N(\xi, \tau)}{\partial \tau}.$$

V některých zdrojích je možné se setkat s poněkud vágní definicí dopravní hustoty a intenzity. Dopravní intenzita $I(x, \tau) = \frac{\Delta N}{\Delta \tau}$ je určena jako podíl počtu vozidel ΔN , která projedou daným místem na pozici x během časového intervalu $\Delta \tau$. Dopravní hustotu $\rho(x, \tau) = \frac{\Delta N}{\Delta x}$ reprezentuje

podíl počtu vozidel ΔN nacházejících se v intervalu $[x, x + \Delta x]$ v daném okamžiku τ . Tento přístup má však svá úskalí. Pokud bychom chtěli určit dopravní hustotu v konkrétním místě (bodě) na komunikaci, jak velký interval Δx bychom měli zvolit? Tento údaj jistě nesmí záviset pouze na konkrétním pozorovateli a jeho volbě. Řešením by bylo přistoupit k limitnímu přechodu, kdy $\Delta x \rightarrow 0$ a určit hustotu pomocí derivace, avšak počet vozidel N je veličina diskrétní, nikoliv spojitá, takže podmínka diferencovatelnosti není splněna. Tuto překážku řeší právě výše uvedená formulace vyhlazeného počtu částic, který již představuje funkci spojitou.

Obě rovnice pro hustotu a intenzitu můžeme dále zjednodušit do tvaru

$$\rho(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^M p(\xi - \alpha_k(\tau) | \sigma),$$

$$I(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^M \frac{d\alpha_k(\tau)}{d\tau} p(\xi - \alpha_k(\tau) | \sigma) = \sum_{k=1}^M v_k(\tau) p(\xi - \alpha_k(\tau) | \sigma).$$

Vzhledem k předpokladu $p(\xi | \sigma) \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ (tedy, že funkce p je spojitě diferencovatelná do 2.řádu) platí

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 N(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} = \frac{\partial^2 N(\xi, \tau)}{\partial \tau \partial \xi} = -\frac{\partial I}{\partial \xi'}$$

což koresponduje s *rovnicí kontinuity*. Tu můžeme pro tento případ interpretovat jako zákon zachování počtu vozidel. Pokud omezíme naše úvahy pouze na homogenní dopravní proud, kde $v_k(\tau) = V(\tau)$, dostáváme rovnost

$$I(\xi, \tau) = V(\tau)\rho(\xi, \tau),$$

tedy obecně přijímanou aproximaci vztahu mezi třemi základními stavovými veličinami dopravního proudu. Zde je však nutné zdůraznit, že rovnice byla odvozena za jistých podmínek a že její platnost není univerzální.

Fundamentální diagram

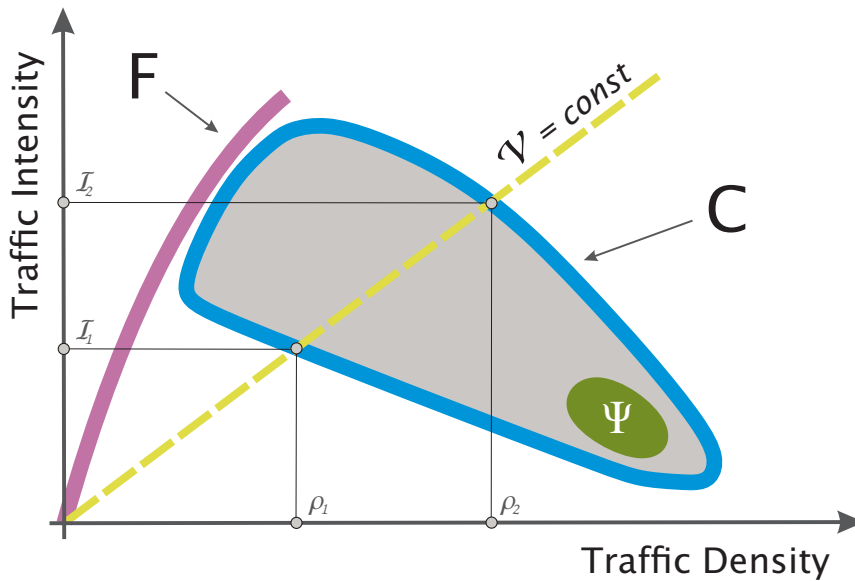
K vizualizaci vztahů mezi třemi základními dopravními makroveličinami (fázovými proměnnými) slouží v oblasti fyziky dopravy *fundamentální diagramy*. Jeho schéma uvádí obr. 4. Autoři starších prací vycházeli z tvrzení, viz [13], že intenzita provozu I a hustota ρ jsou propojeny určitou funkční závislostí $I = I(\rho)$, jejíž grafická interpretace má tvar křivky $H(I, \rho) = 0$ ležící v tzv. *ID rovině* (intensity-density plane). Tu lze chápat jako mapu dvojic intenzita-hustota $(\rho, I(\rho))$.

Pro rychlost platil analogický předpoklad, tedy že $V = V(\rho)$ je funkce a její graf je opět křivka. Tato dvofázová teorie připouštěla existenci pouze dvou různých stavů - *volné dopravy* F (free traffic) a *kondenzované dopravy* C (congested traffic). Tyto domněnky však zcela vyvrátila Kernerova třífázová teorie [14] a jeho hypotéza o dvourozměrných stavech dopravního proudu. V třífázové teorii má kondenzovaná doprava dvě jasně odlišitelné podfáze:

- *synchronizovaný tok* - je obvykle fixován na zúžení komunikace, rychlost vozidel se synchronizuje, ale pohyb vozidel není nijak drasticky omezen.
- *wide moving jam* (rozsáhlá pohybující se kongesce) - charakterizuje ji propagační rychlost kongesce, jež se zachovává, i když rychlost jednoho vozidla uvnitř kongesce může být nulová. Tato propagační rychlost je vždy záporná.

Kerner ve své práci navíc k třífázové teorii uvádí:

Uvažujme homogenní synchronizovaný dopravní proud, který lze chápat jako hypotetický stav synchronizovaného proudu identických vozidel s identickými řidiči, ve kterém se všechna vozidla pohybují s toutéž na čase nezávislou rychlostí (na obr. 4 vyznačena žlutou křivkou) a mají mezi sebou stejné rozestupy. Takový homogenní synchronizovaný proud se může překvapivě objevit kdekoliv v jisté dvourozměrné podoblasti ID roviny. To znamená, že v režimu kondenzované dopravy řidič neudržuje žádný specifický rozestup. Naopak má ohledně prostorové světlosti k předcházejícímu vozidlu libovolnou možnost volby. To vede ke skutečnosti, že množina přípustných stavů popsaných dvojicí intenzita-hustota je nekonečná, přestože rychlost vozidla je konstantní. Stav reálného provozu pro tutéž rychlost tedy vlastně tvoří určitou dvourozměrnou oblast ležící uvnitř ID roviny.



Obrázek 4: Schéma fundamentálního diagramu.

V matematickém vyjádření to znamená, že od funkčního předpisu $I = I(\rho)$ je nutné přejít k binární relaci, jež představuje libovolnou množinu uspořádaných dvojic. *Binární ID relace* Ω_{ID} se definuje jako množina všech dvojic $(\rho, I) \in (0, +\infty)^2$, které lze v daném dopravním proudu naměřit. *Definičním oborem* relace Ω_{ID} je množina všech takových ρ , pro která existuje alespoň jedno I , že platí $(\rho, I) \in \Omega_{ID}$. Obdobně *obor hodnot* tvoří množina všech I , pro která existuje alespoň jedno ρ , že platí $(\rho, I) \in \Omega_{ID}$. Pak zřejmě platí, že $\Omega_{ID} \subset \text{Dom}(\Omega_{ID}) \times \text{Ran}(\Omega_{ID})$. Analogicky lze zavést *binární VD relaci* Ω_{VD} pro průměrnou rychlost a hustotu.

Sestavení základních binárních relací

Nyní se zaměříme na způsob, jak empirická data převést do grafické podoby znázorňující základní relace, tedy *fázový diagram*. Vyjdeme z empirického vzorku dat pro M vozidel jedoucích za sebou v jednom pruhu, který má tvar

$$\{(\tau_k^{(in)}, \tau_k^{(out)}, v_k, l_k) \in \mathbf{R}^4, k = 1, 2, \dots, M)\}.$$

Pro něj můžeme určit lokální intenzitu $I = M/(\tau_M^{(out)} - \tau_1^{(in)})$ a lokální průměrnou rychlost $V = (\sum_{k=1}^M v_k)/M$. Hodnotu lokální hustoty lze dále odhadnout aplikací vztahu $\rho = I/V$.

Aplikací uvedeného postupu na všechny vzorky $i = 1, 2, \dots, m$ získáme empirické binární relace $\Omega_{ID} = \{(\rho_i, I_i) : i = 1, 2, \dots, m\}$ a $\Omega_{VD} = \{(\rho_i, V_i) : i = 1, 2, \dots, m\}$. Jejich grafy slouží jako souhrnná vizualizace makroskopických vlastností dopravního proudu.

Unifikační procedura

Reálný dopravní proud vykazuje jisté typické znaky - výraznou nelinearitu u kondenzovaných stavů, chaotický vývoj stavových proměnných či opakující se strmé nárůsty hustoty. Rozsáhlejší vzorky souboru vozidel tak vykazují značné nehomogenity, stejně jako jejich mikrostruktura. Související hustoty pravděpodobnosti pak mají průběh typický pro systémy smíšené z několika různých rozdělení. Je-li naším cílem najít homogenní charakteristiku, je více než vhodné provést *třístupňovou unifikační proceduru*, viz [15]. Tento postup zabrání nežádoucímu míchání stavů o rozdílných statistických vlastnostech (např. rezistivita, viz dále), různých vlastnostech vozidel (odstup, světlost, rychlost) a psychologických schopnostech (pozornost řidiče, reakční doba, schopnost rozhodování). Unifikační procedura má tři součásti:

- *vzorkovací fáze* - rozdělení celého datového souboru na malé homogenní vzorky několika sousedních vozidel o počtu M , který se označuje termínem vzorkovací velikost. Pokud celkový počet vzorků je m , lze definovat datový vzorek vztahem

$$S_i = \{(\tau_k^{(in)}, \tau_k^{(out)}, v_k, l_k) \in \mathbf{R}^4, k = (i-1)M + 1, (i-1)M + 2, \dots, iM\}.$$

Tomuto vzorku náleží samozřejmě také příslušná binární relace $\Omega_{ID}^i, \Omega_{VD}^i$.

- *škálovací fáze* - přeškálování náhodných proměnných (odstupů, světlostí) v každém vzorku takovým způsobem, aby střední hodnota byla rovna 1. Jako příklad lze uvést soubor časových světlostí pro i -tý vzorek $Z_i := \{z_k : k = (i-1)M + 1, (i-1)M + 2, \dots, iM\}$, který má po přeškálování tvar $Y_i := \{y_k, k = (i-1)M + 1, (i-1)M + 2, \dots, iM\}$, kde

$$y_k = \frac{z_k \cdot M}{\sum_k z_k} = \frac{z_k}{\langle Z_i \rangle}.$$

Škálované světlosti tedy získáme vydělením střední hodnotou světlostí daného vzorku.

- *segmentační fáze* - pro každý vzorek jsou vypočteny příslušné hodnoty fázových proměnných (hustoty, intenzity a průměrné rychlosti) a v ID rovině se zvolí malý *fázový segment* Ψ (viz zelená oblast na obr. 4). Pokud hodnoty fázových proměnných daného vzorku leží mimo zvolený segment, je vzorek z dalšího zpracování vyloučen. Statistické rozdělení odstupů, světlostí či individuálních rychlostí je díky tomu odhadnuto na základě prakticky homogenních dat, která náležejí malé podoblasti grafu relací Ω_{ID} nebo Ω_{VD} .

Statistické vlastnosti mikroveličin

Dopravní mikroskopické veličiny popisují chování jednotlivých vozidel, tzv. dopravní mikrostrukturu. Ta má, jak již bylo zmíněno výše, zjevně stochastický charakter, který je zapříčiněn zejména individualitou řidiče. Na dopravní veličiny lze tak nahlížet jako na realizace náhodných veličin a aplikovat pravděpodobnostní popis. V následujícím textu se budeme věnovat rozdělení dvou

hlavních zástupců z řad mikroveličin - rychlostí a světlostí.

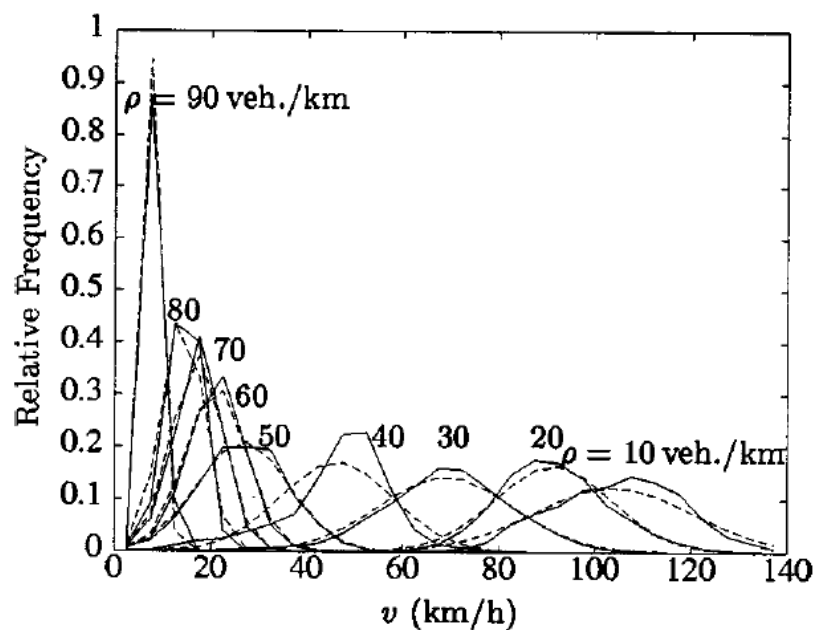
Rychlost

Hustota pravděpodobnosti *rozdělení rychlosti* byla odvozena z měření v provozu s malým podílem nákladních vozidel. Nejprve je nezbytné provést rozřazení rychlostí z různých dopravních stavů do různých hustotních pásem. Toho lze dosáhnout právě postupem popsáním v předchozí sekci, tedy postupným výběrem segmentů z ID roviny. Rozdělení rychlosti odpovídá v daném segmentu *normálnímu (Gaussovu) rozdělení*, má tedy tvar

$$q(v) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-V)^2}{2\sigma^2}},$$

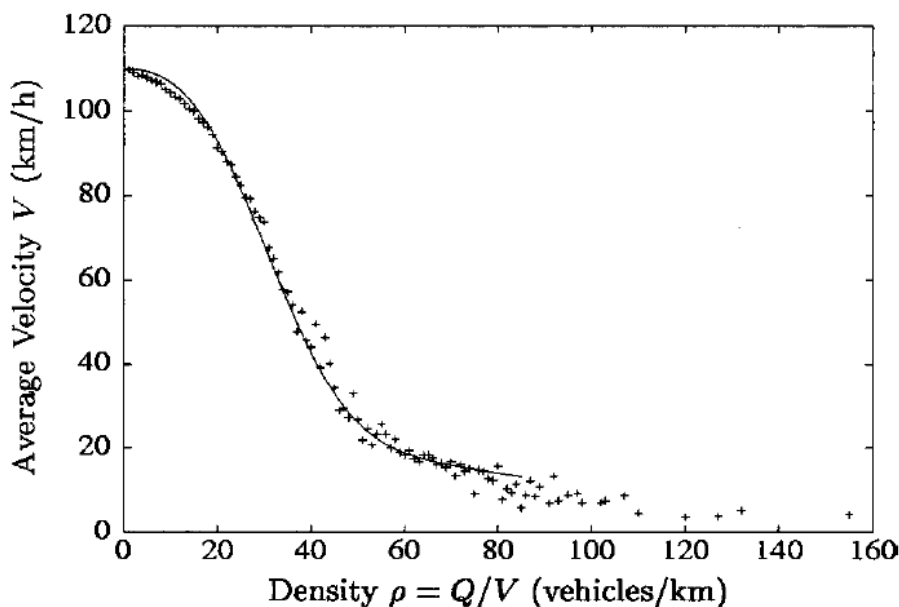
kde střední hodnota $E(v) = V$ a rozptyl $VAR(v) = \sigma^2$. Parametry rozdělení se významně mění v závislosti na poloze fázového segmentu v ID rovině, což ilustrují obr. 5 a 6:

- rostoucí hustota ρ způsobí pokles průměrné rychlosti V i pokles rozptylu σ^2 ,
- klesající hustota ρ způsobí nárůst průměrné rychlosti V i nárůst rozptylu σ^2 .



Obrázek 5: Závislost rozptylu průměrné rychlosti V na měnící se dopravní hustotě ρ . Převzato z [13].

Celkem snadno nahlédneme, že tyto vlastnosti kvalitativně odpovídají empirické zkušenosti. V houstnoucím provozu (přechodu do kondenzované fáze) vozidla přizpůsobí svou rychlost okolí a sníží ji, systém vozidel se do jisté míry synchronizuje, takže rozptyl rychlostí jednotlivých vozidel je menší. Při nízké hustotě dopravního proudu se systém nachází ve volné fázi - jednotlivá vozidla nejsou omezena svými sousedy, takže řidič jede zpravidla rychleji a může volit rychlost z mnohem širšího intervalu.



Obrázek 6: Závislost střední hodnoty rychlosti V na rostoucí dopravní hustotě ρ . Převzato z [13].

Časová světlost

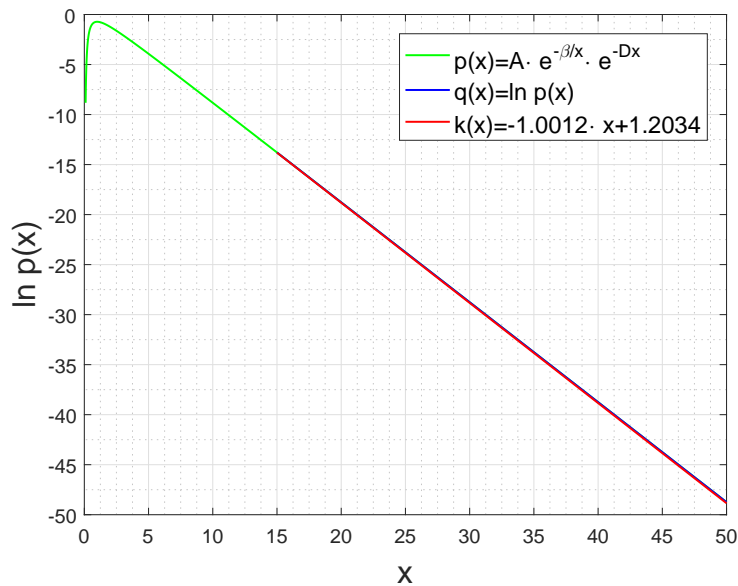
Nyní se zaměříme na časovou světlost. Hustota pravděpodobnosti $p(x)$ rozdělení časové světlosti sousedních vozidel se v teorii dopravy označuje jako *headway distribuce* či méně často *clearance distribuce*. Tyto dva termíny jsou v literatuře občas zaměňovány, rozdíl mezi nimi je však z definic obou mikroveličin jistě zřejmý. Během vývoje disciplíny VHM bylo navrženo mnoho různých modelů statistického rozdělení světlostí. V počátcích šlo spíše o porovnávání známých statistických rozdělení rozšířených v dalších vědeckých odvětvích s naměřenými daty (normální či exponenciální distribuce). Později se autoři snažili při odhadování reálných distribucí vycházet více z vlastností empirických dat a hledali distribuce, které by je popisovaly co nejlépe (Erlangova, Gamma či log-normální distribuce). V průběhu let byla odhalena tři základní empirická kritéria pro výběr vhodné distribuce světlostí (obecně proměnné x):

- Chvost distribuce $p(x)$ musí mít ryze exponenciální průběh, což značí, že graf funkce $\ln p(x)$ musí mít v $+\infty$ lineární asymptotu, jejíž sklon je záporný (viz obr. 7). Rozdělení tedy patří do skupiny tzv. *balancovaných distribucí*. To je matematický důsledek skutečnosti, že interakce ve vzorku vozidel ještě není dlouhodobá, tj. že vzdálená vozidla nijak neinteragují.
- Hustota pravděpodobnosti $p(x)$ má *plato v nule*. Tato vlastnost se dá matematicky vyjádřit rovnicí

$$\forall m \in \mathbf{N} : \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-m} p(x) = 0,$$

kde proměnná x vyjadřuje časovou světlost. To je matematický důsledek enormních repulzivních sil působících mezi velmi blízkými vozidly. Názorná ukázka typické headway distribuce empirických dat je na obrázku 8, kde je plato velmi zřetelné. Patrný je zde také exponenciální chvost.

- Hustota pravděpodobnosti $p(x)$ musí být spojitou funkcí, protože její nespojitost nemá žádnou oporu ve fyzikálním popisu dopravního systému.



Obrázek 7: Ilustrativní zástupce balancovaných distribucí.

Hledaná hustota pravděpodobnosti musí přirozeně splňovat také některá teoretická kritéria vycházející z matematické podstaty teorie pravděpodobnosti:

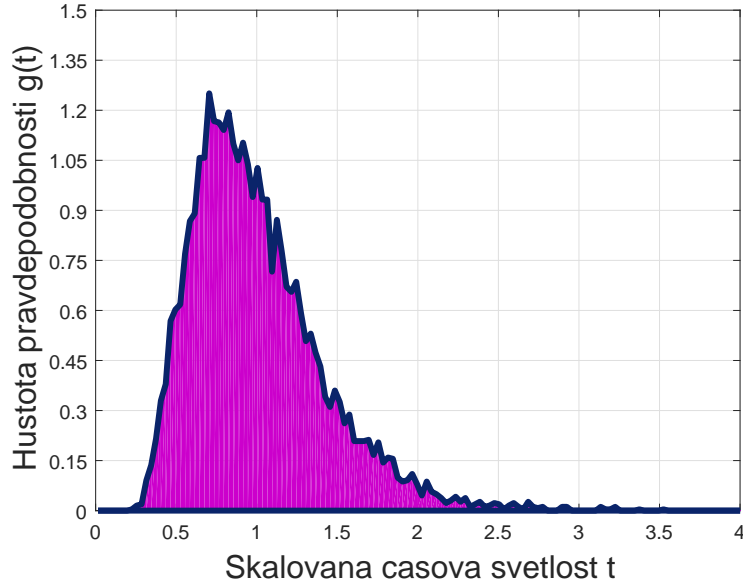
- Je nezáporná na celém oboru \mathbf{R} , tj. pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí $p(x) \geq 0$.
- Musí být normalizována, její integrál přes celý obor \mathbf{R} musí být roven 1 (jistý jev), tedy $\int_{\mathbf{R}} p(x) dx = 1$.
- Její střední hodnota musí být vzhledem ke škálovací fázi výše zmíněné unifikční procedury rovna 1, je tedy nutné dodržet škálovací rovnost $\int_{\mathbf{R}} x p(x) dx = 1$.

Aktuálně se jako nejvhodnější kandidát pro distribuce časových světlostí jeví třída GIG distribucí (*zobecněná inverzní Gaussova distribuce*), označme ji $p_{GIG}(x)$. Splňuje samozřejmě všechna právě vyjmenovaná kritéria. Její hlavní a nesmírně výrazná výhoda však tkví ve skutečnosti, že jde o rozdělení odvozené analyticky pro jistý dopravní model. Konkrétně se jedná o termodynamický částicový plyn s hyperbolickým repulzním potenciálem, tj. $\varphi(r) = \frac{1}{r}$, kde r označuje vzdálenost. Kromě $p_{GIG}(x)$ neexistuje žádný jiný model, který je odvozen analyticky a zároveň odpovídá realitě (tzn. generuje rozdělení světlostí, které odpovídá naměřeným vzorkům).

GIG distribuce

Náhodná veličina X má *dvouparametrické GIG rozdělení* (Generalized Inverse Gaussian distribution), jestliže pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$p_{GIG}(x) = \Theta(x) \sqrt{\frac{D}{\beta}} \frac{1}{2\mathcal{K}_1[2\sqrt{\beta D}]} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-Dx},$$



Obrázek 8: Ilustrativní zástupce empirických headway distribucí

kde $\beta \geq 0$ a $D > 0$. Pro dodržení škálovací rovnosti pak D závisí na parametru β a rozdělení se tak stává jednoparametrickou třídou, kde jediným parametrem je tzv. *stochastická rezistivita* β . Symbol \mathcal{K}_l reprezentuje MacDonaldu funkci l -tého řádu (tj. modifikovanou Besselovu funkci druhého druhu a l -tého řádu). Střední hodnota $E(X)$ je podle [16] dána vztahem

$$E(X) = \sqrt{\frac{\beta}{D}} \frac{\mathcal{K}_2[2\sqrt{\beta D}]}{\mathcal{K}_1[2\sqrt{\beta D}]}.$$

Pokud s ohledem na správné škálování položíme $E(X) = 1$, najdeme pro parametr D závislost

$$D(\beta) = \beta + \frac{3 - g(\beta)}{2},$$

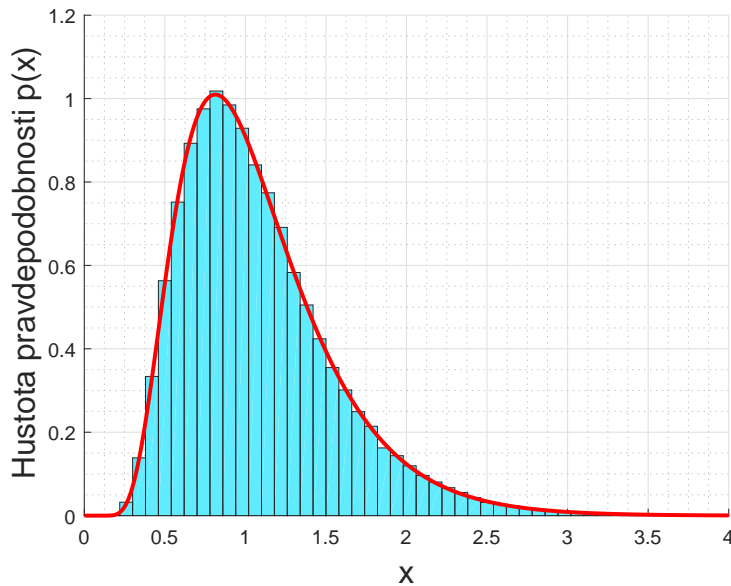
kde $g(\beta)$ reprezentuje korekční funkci aproximativně odhadnutou na $g(\beta) \approx e^{-\sqrt{\beta}}$. Pro úplnost uved' me také vztah pro rozptyl škálovaného dvouparametrického GIG rozdělení, viz [16],

$$\text{VAR}(X) = \frac{\beta + 2}{D} - 1.$$

Průběh $p_{GIG}(x)$ je znázorněn červenou křivkou na obr. 9, který ilustruje grafické srovnání teoretické hustoty pravděpodobnosti (konkrétně pro $\beta = 2, D = 3$) a empirické hustoty pravděpodobnosti vyjádřené pomocí histogramu.

Stochastická rezistivita

Pokud při modelování časových světlostí použijeme předpoklad o GIG rozdělení, hledáme takovou hodnotu parametru β , aby vzdálenost empirické a teoretické distribuce byla co nejmenší. Tento parametr rozhoduje o konečném tvaru příslušné distribuce. V termodynamickém částicovém plynu, z něž byl model GIG rozdělení odvozen, zastupuje β inverzní termodynamickou teplotu. V oblasti dopravního modelování se označuje termínem *rezistivita* (někdy *stochastická rezistivita*) a

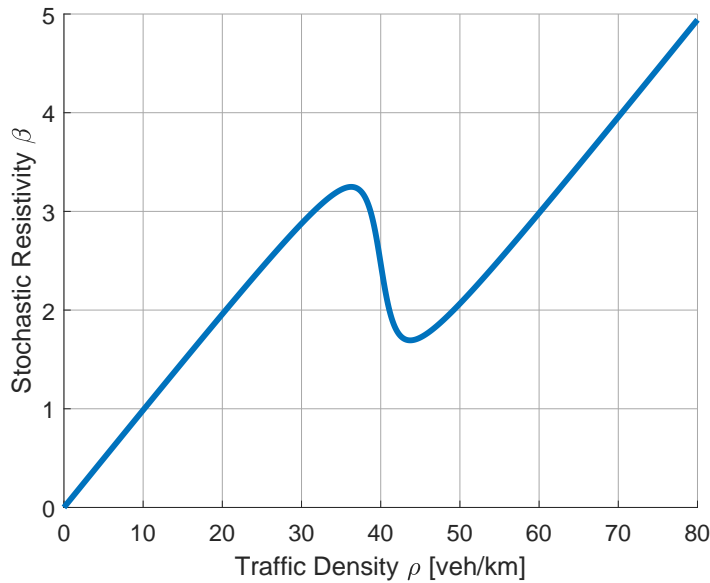


Obrázek 9: Odhadovaná a empirická hustota pravděpodobnosti.

vyjadřuje odolnost systému vůči stochastickému šumu. Časové/prostorové odstupy/světlosti jsou náhodnou veličinou, protože nejen vlastnosti jednotlivých vozidel v reálném provozu nejsou identické, ale především každý řidič má jiné rozhodovací a reakční schopnosti. Velmi důležitou roli hraje také míra stresu při řízení vozidla, jakési psychické vypětí řidiče. Právě tuto vlastnost charakterizuje rezistivita. Představme si nyní dva krajní případy, jež se mohou vyskytnout v dopravním proudu a pomohou nám ilustrovat reálný význam stochastické rezistivity:

- Při *nízké dopravní hustotě* se vozidla pohybují prakticky nezávisle. Řidič není ovlivněn chováním řidičů ostatních vozidel, neboť odstupy mezi nimi jsou dostatečně velké. Vozidlo může jet libovolnou rychlostí, takže se stochastické rysy dopravy mohou projevit v plné míře. System je tedy výrazně ovlivněn stochastickým šumem (odolnost vůči šumu je nulová). Psychické vypětí řidiče je nulové, takže $\beta = 0$.
- Při *velmi vysoké dopravní hustotě* je pohyb vozidla silně závislý na chování sousedních vozidel. Vozidla se do jisté míry synchronizují a stochastické rysy dopravy jsou potlačeny. Řidič musí rychlost a odstup vozidla výrazně přizpůsobit okolí, odolnost celého systému vůči stochastickému šumu prudce narůstá. Psychické vypětí řidiče (tj. nároky na jeho ostražitost) je velmi vysoké, v krajním (teoretickém) případě $\beta \rightarrow +\infty$.

Rezistivita tedy modifikuje (zesiluje či zeslabuje) vliv interakčních sil mezi vozidly. Z výše uvedené rozvahy by se mohlo zdát, že závislost $\beta = \beta(\rho)$ je rostoucí funkce. Platí však tento předpoklad na celém intervalu dopravních hustot? Empirické závislosti, jejichž charakter je symbolicky znázorněn na obr. 10, dokazují, že funkce $\beta = \beta(\rho)$ v jistém rozsahu hustot klesá. Tento jev je způsoben přechodem z volné do kondenzované fáze. Při houstnoucím provozu (za hranicí volné fáze) je vozidlo nuceno snižovat svou rychlost, odstupy mezi vozidly jsou však stále dostatečné. Řidič má tedy stále dostatek prostoru na individuální volbu odstupu a při nižší rychlosti může být méně ostražitý, takže stochastická systémů lehce narůstá a rezistivita klesá. Pokud hustota provozu však nadále roste, musí řidič reagovat na zmenšující se odstupy mezi vozidly a přizpůsobit se poměrně výrazně pohybu ostatních vozidel. Stochastická systémů začne výrazně klesat a rezistivita opět narůstá.



Obrázek 10: Schématická reprezentace závislosti rezistivity β na dopravní hustotě ρ

Závěr

Ve všech dopravních úlohách (zejména v úlohách kapacitního charakteru) hraje odstup mezi za sebou jedoucími vozidly zásadní roli. Soubor vozidel v reálném provozu tvoří stochastický systém, u něhož lze predikovat časový vývoj polohy či rychlosti jednotlivých elementů pouze statisticky, užitím pravděpodobnostního popisu. I v těch nejjednodušších dopravních situacích je tedy hlavním určujícím faktorem právě statistické rozdělení vzdáleností, ať jde o řešení propustnosti daného úseku či například kapacity křižovatky. Matematické modelování dopravního proudu je tedy v teorii dopravy stěžejní úlohou, která dala vzniknout moderní vědecké disciplíně VHM.

V počátcích éry VHM, tedy v letech 1930-1970, byly modely rozdělení světlostí odvozeny s využitím velmi zjednodušujících předpokladů:

- Všechna vozidla se mohla pohybovat libovolnou rychlostí, šlo tedy o volnou fázi. Interakce mezi jednotlivými vozidly byly považovány za zanedbatelné.
- Jakákoliv zaznamenaná světlost byla nezávislá na jiné zaznamenané světlosti. Jinými slovy náhodné veličiny popisující tyto světlosti byly považovány za nezávislé.
- Každý navržený model byl unimodální (jednovrcholový) a nevykazoval exponenciální chvost.

Tento hrubý odhad se od reality příliš nelišil vzhledem k tehdejšímu nízkému počtu vozidel na komunikacích. Střední hodnoty navrhovaných distribucí odpovídaly průměrné hodnotě odstupů pozorovaných v praxi.

V 70. letech se počet vozidel na komunikacích výrazně navýšil a bylo zřejmé, že původní modely pro popis stávající situace nestačí. Tehdejší autoři museli některé předpoklady modifikovat, aby včlenili do popisu dopravního proudu jisté omezení řídiče ostatními vozidly:

- Všechna vozidla se mohla stále pohybovat libovolnou rychlostí, avšak interakce mezi některými vozidly nebyla zanedbatelná.

-
- Ne všechny zaznamenané světlosti byly nezávislé, neboť odstupy sledujících vozidel souvisely s odstupem od tzv. vedoucího vozidla.

Větší důraz byl také kladen na přesnější měření dopravních dat a odhadování pomocí komplexnějších modelů. Odpovídající distribuce však stále nepřipouštěly vliv rychlosti na velikosti odstupů vozidel.

Zásadní průlom ve VHM znamenala 90. léta, kdy byla pro dopravní kongesce prokázána závislost headway distribucí na rychlosti, k čemuž přispěly zejména moderní metody získávání dat (radary, metody zpracování obrazu). V současné době se tedy přihlíží k těmto domněnkám:

- Vozidla mohou jet různou rychlostí. Pokud je jejich rychlost menší než rychlost ve volné fázi, headway distribuce jsou na rychlosti závislé.
- Nacházejí-li se vozidla v kondenzované fázi dopravního proudu, interakce mezi jednotlivými vozidly není zanedbatelná.

Aktuální studie dokazují, že pomocí matematického aparátu lze nejen řešit optimalizační dopravní úlohy, ale dokonce dešifrovat rozhodovací procesy probíhající v mozku řidiče. Aplikací poznatků teorie pravděpodobnosti je možné také určit tzv. interakční dosah, který vyjadřuje, kolik za sebou jedoucích vozidel spolu fakticky interaguje a na čem tento dosah závisí. Zatím nejvhodnějším kandidátem modelování distribuce světlostí je třída GIG distribucí, která ke kvantifikaci psychického vypětí řidiče využívá výše uvedenou rezistivitu. Disciplína VHM se však vyvíjí i nadále.

Literatura

- [1] Greenshields, B.D., 1934. The photographic method of studying traffic behavior. HRB Proceedings, 13, pp 382-396
- [2] Greenshields, B.D., 1935. A study of traffic capacity. HRB Proceedings, 14, pp 448-474
- [3] Adams, W.F., 1936. J. Inst. Civil Engin. 4 (1), 121.
- [4] May, A.D., 1990. Traffic Flow Fundamentals, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [5] Gerlough, D.L., 1955. Eno Found. Highway Traffic Control.
- [6] Greenberg, I., 1966. Austral. Road Res. 2 (7), 14.
- [7] Branston, D., 1976. Transport. Sci. 10 (2), 125.
- [8] Krbálek, M., Helbing, D., 2004. Physica A 333, 370.
- [9] Krbálek, M., 2007. J. Phys. A: Math. Theor. 40, 5813.
- [10] Li, L., Chen, X.M., 2017. Transportation Research Part C 76, 170.
- [11] Szabová, Z., 2016. *Studie korelací v souborech empirických dopravních dat*, bakalářská práce, FJFI ČVUT v Praze.
- [12] Krbálek, M., Apeltauer, J., Apeltauer, T., Szabová, Z., 2018. *Three methods for estimating a range of vehicular interactions*. Physica A 491, 112.
- [13] Helbing, D., 2001. *Traffic and related self-driven many-particle systems*, Rev. Mod. Phys. 73, 1067.
- [14] Kerner, B.S., 2004. *The Physics of Traffic*, Springer-Verlag, New York.
- [15] Krbálek, M., Krbálková, M., 2018. *3s-Unification for Vehicular Headway Modeling*, Proceedings of SPMS 2018, Dobřichovice, ISBN 978-80-01-06501-3
- [16] Vacková, J., 2017. *Poruchová teorie statistické rigidity částicových systémů*, diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze.