# Socio-fyzikální modelování dynamiky dopravního proudu

Milan Krbálek
Katedra matematiky Fakulty jaderné a
fyzikálně inženýrské, ČVUT v Praze

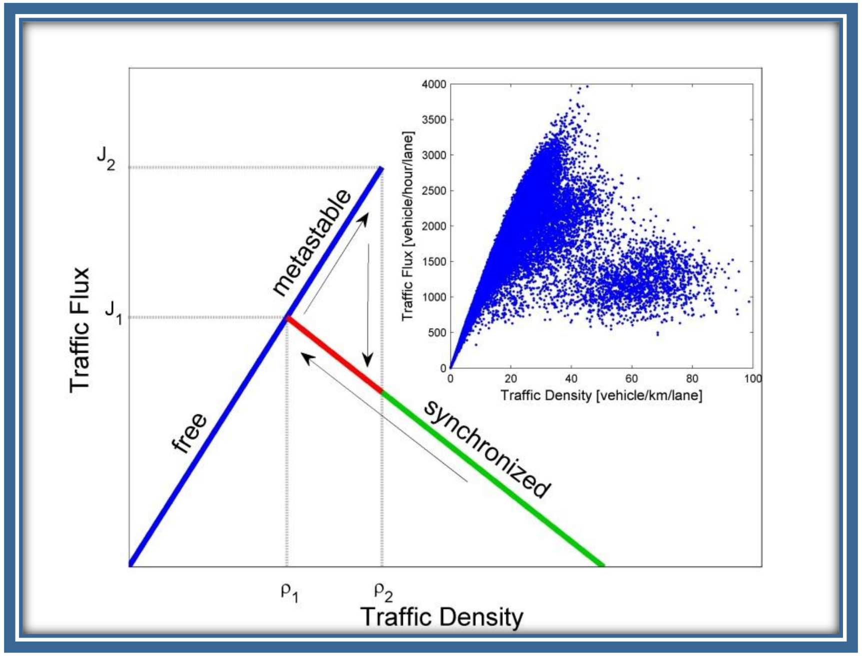
## Dopravní proud jako agentní systém

*Dopravní systém* = systém vozidel pohybujících se (v jednom nebo dvou směrech) na vymezeném úseku jednoproudé či víceproudé komunikace

- jde o speciální případ tzv. samoorganizovaného agentního systému
- vybraný agent je ovlivňován pohybem ostatních agentů
- lokální povaha interakcí
- proces adaptace na chování skupiny
- rozhodovací proces je individuální a je ovlivněn celou řadou vnitřních a vnějších faktorů
- efekty saturace a hystereze

Milan Krbálek, katedra matematiky, FJFI ČVUT v Praze 

# Makroskopické charakteristiky dopravy



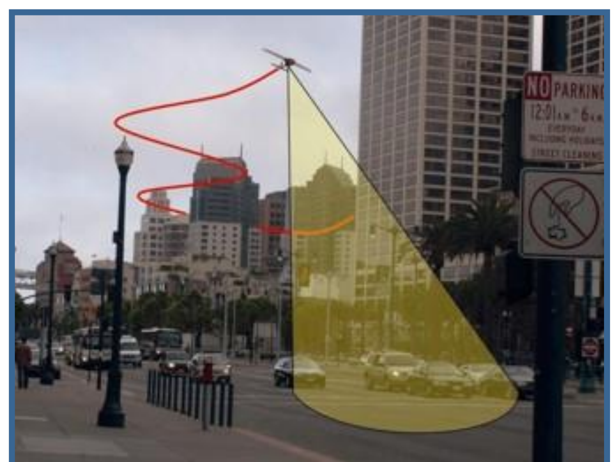

## Makroskopické dopravní veličiny

- dopravní tok $J$
- *dopravní hustota* $\rho$

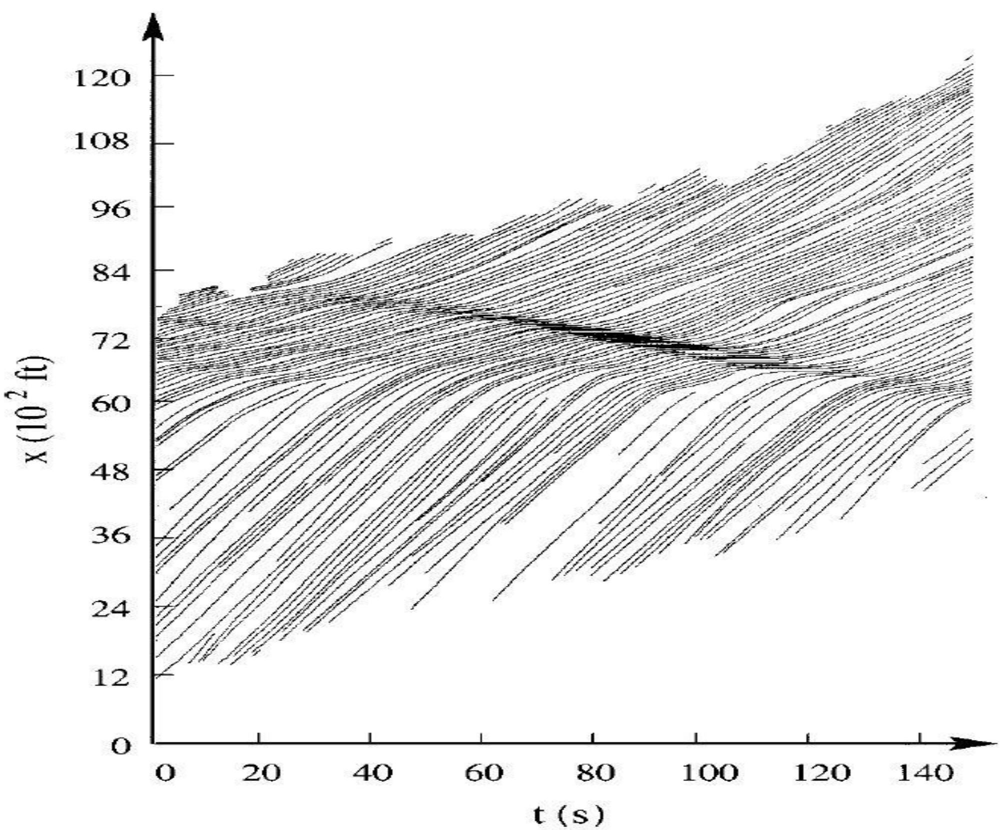
## Efekty saturace a hystereze

- *volná*, resp. *synchronizovaná* fáze dopravy
- dopravní *kongesce*
- stav *stop-and-go*

# Dopravní monitoring



## Výstupy dopravních měření



## Socio-fyzikální agentní systém

(deterministická část)

- $N$ agentů na jednotkové sféře

$$S = \left\{ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \left\| \vec{\xi} \right\|_{\mathrm{e}} = 1 \right\}$$

- $\vec{x}_i \ldots$ poloha $i-$tého agenta

$$\vec{x}_i = \big( \cos(\vartheta_i)\cos(\varphi_i), \cos(\vartheta_i)\sin(\varphi_i), \sin(\vartheta_i) \big);$$

$$2\vartheta_i \in \langle -\pi, \pi \rangle \ \wedge \ \varphi_i \in \langle 0, 2\pi );$$

- $\vec{v}_i \ldots$ rychlost $i-$tého agenta
- $\vec{w}_i \ldots$ optimální rychlost $i-$tého agenta
- $r_{ik} \ldots$ vzdálenost $i-$tého a $k-$tého agenta

$$r_{ik} = \arccos\big( \cos(\vartheta_i)\cos(\vartheta_k)\cos(\varphi_k - \varphi_i) + \sin(\vartheta_i)\sin(\vartheta_k) \big)$$

## Socio-fyzikální agentní systém

(deterministická část – okolí agenta)

- $\varepsilon-$okolí odvozené od tzv. diskrétní metriky $\tau(\vec{x},\vec{y})$ pro $\varepsilon \leqslant 1$

$$^{(\tau)}\mathcal{O}_\varepsilon(\vec{x}_i) = \{\vec{x}_i\}$$

- $\varepsilon-$okolí odvozené od tzv. diskrétní metriky $\tau(\vec{x},\vec{y})$ pro $\varepsilon > 1$

$$^{(\tau)}\mathcal{O}_\varepsilon(\vec{x}_i) = S$$

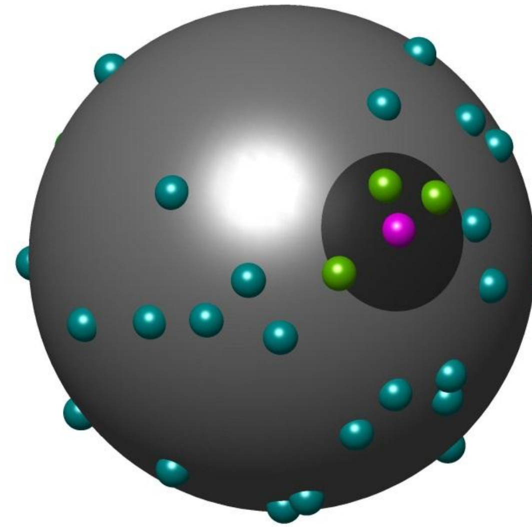
- kruhové $\varepsilon-$okolí odvozené od euklidovské metriky $\varrho_2(\vec{x},\vec{y})$ pro $\varepsilon \ll 1$

$$^{(\varrho_2)}\mathcal{O}_\varepsilon(\vec{x}_i) = S \cap B(\vec{x}_i,\varepsilon)$$

- tzv. párové okolí

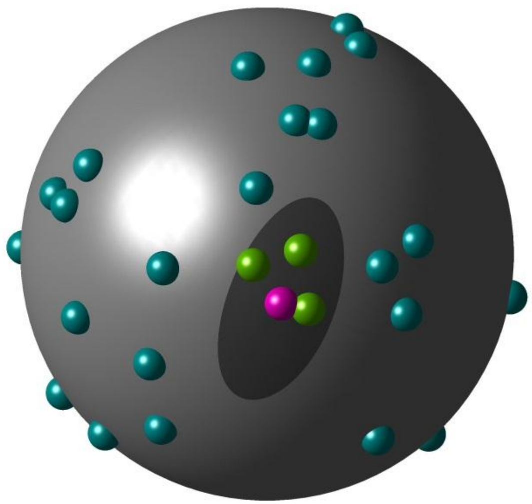
$$\mathcal{O}(\vec{x}_i) = \{\vec{x}_i, \vec{x}_{\mathrm{g}(i)}\},$$

kde g$(i)$ je nejbližší agent k $i-$tému, tj. $\forall j \in \widehat{N} \setminus \{i\} : r_{i,\mathrm{g}(i)} \leqslant r_{ij}$



## Socio-fyzikální agentní systém

(deterministická část – okolí agenta)



- $\alpha \in (0,1\rangle,\ \omega \in \langle 0, 2\pi),\ \varepsilon \ll 1 \ldots$ parametry tvaru okolí

$$\mathbb{A} = \frac{1}{\alpha^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2\cos^2(\omega)+\sin^2(\omega) & (\alpha^2-1)\sin(\omega)\cos(\omega) \\ 0 & (\alpha^2-1)\sin(\omega)\cos(\omega) & \alpha^2\sin^2(\omega)+\cos^2(\omega) \end{pmatrix}$$

- $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle_{\mathbb{A}}$... skalární součin generovaný asociovanou bilineární formou
- $\|\vec{x}\|_{\mathbb{A}} \ldots$ norma generovaná $\mathbb{A}-$skalárním součinem
- $E \ldots$ elipsoid generovaný maticí $\mathbb{A}$ se středem v bodě $(1,0,0)$

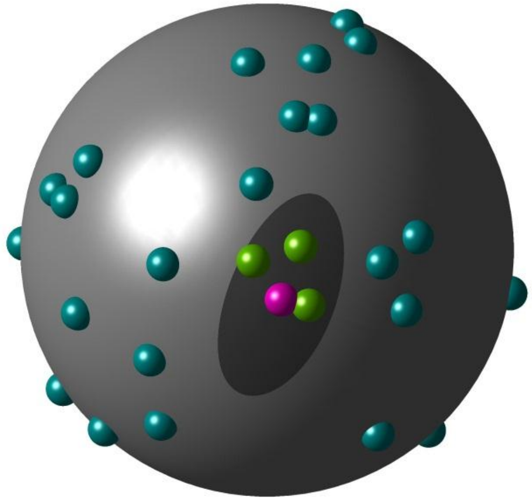
$$E = \left\{\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{\xi} - (1,0,0)\|_{\mathbb{A}} < \varepsilon\right\}$$

- $\mathscr{R}_{\Theta,\Phi} \ldots$ sférická rotace o šířku $\Theta$ a délku $\Phi$
- $\mathcal{O}_\varepsilon(\vec{x}_i) \ldots \varepsilon-$okolí $i-$tého agenta

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\vec{x}_i) = S \cap \mathscr{R}_{\vartheta_i,\varphi_i}(E)$$

## Socio-fyzikální agentní systém

(deterministická část – okolí agenta)



- redukované $\varepsilon$—okolí $i$—tého agenta

$$\mathcal{O}^\star_\varepsilon(\vec{x}_i) = \mathcal{O}_\varepsilon(\vec{x}_i) \setminus \{\vec{x}_i\}$$

- indexová množina okolních agentů

$$I_\varepsilon(\vec{x}_i) = \{k \in \widehat{N} : \vec{x}_k \in \mathcal{O}^\star_\varepsilon(\vec{x}_i)\}$$

# Socio-fyzikální agentní systém

(deterministická část – energetický popis)

- kinetický popis

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left\| \vec{v}_i - \vec{w}_i \right\|^2$$

- silový popis (dvouagentní interakce)

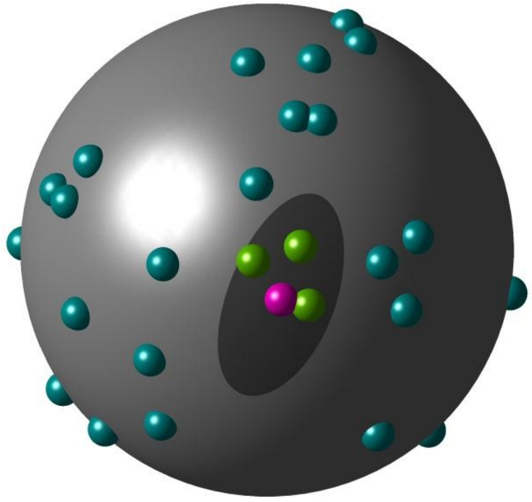
$$F(r) = -\frac{\mathrm{K}}{r^\gamma} \quad (0 < \gamma < \infty)$$

- potenciálový popis (dvouagentní potenciál $\eta(r)$)

$$\eta(r) = \begin{cases} -\mathrm{K}\ln(r) & \ldots \quad \gamma = 1 \quad \text{coulombovská repulze} \\ \frac{\mathrm{K}}{r} & \ldots \quad \gamma = 2 \quad \text{vyvážená mocninná repulze} \\ \frac{\mathrm{K}}{\gamma-1}\frac{1}{r^{\gamma-1}} & \ldots \quad \gamma > 2 \quad \text{silná mocninná repulze} \\ \frac{\mathrm{K}}{\gamma-1}\frac{1}{r^{\gamma-1}} & \ldots \quad \gamma \in (1,2) \quad \text{slabá mocninná repulze} \\ \frac{-\mathrm{K}}{1-\gamma} r^{1-\gamma} & \ldots \quad \gamma \in (0,1) \quad \text{polynomická repulze} \end{cases}$$

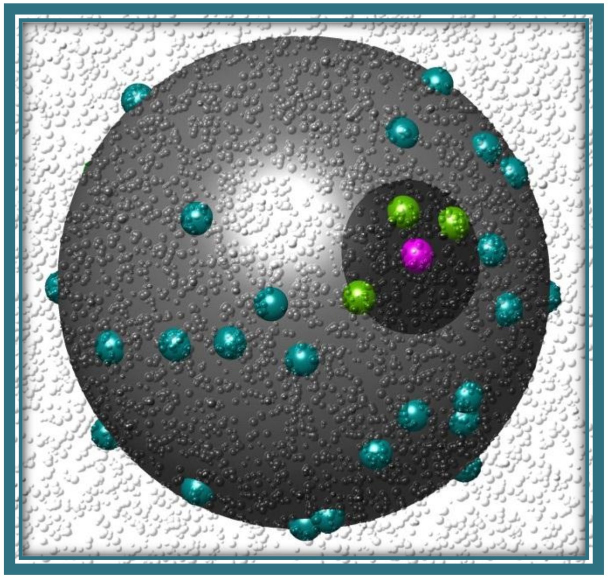
- celková potenciální energie

$$U_\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in I_\varepsilon(\vec{x}_i)} \eta(r_{ij})$$



## Socio-fyzikální agentní systém

(stochastická část)

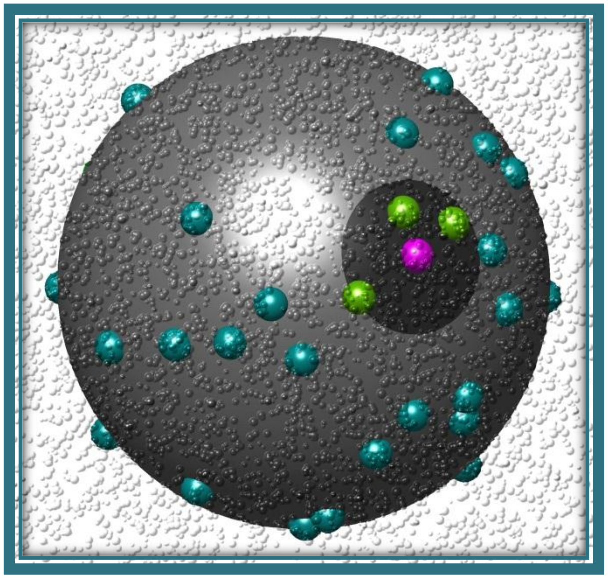


- striktně deterministický popis
- nereflektuje stochastické rysy sociálních systémů
- termodynamická alternativa modelu:
  - celý systém je ponořen do teplotního rezervoáru
  - tj. systém je vystaven náhodným fluktuacím
  - míra vlivu fluktuací je kvantifikována parametrem $\beta$
- $\beta \ldots$ reflektuje míru psychického vypětí řidiče
- v reálném provozu je $\beta$ funkcí dopravní hustoty
- pro malé hustoty: $\beta \approx 0$

## Socio-fyzikální agentní systém

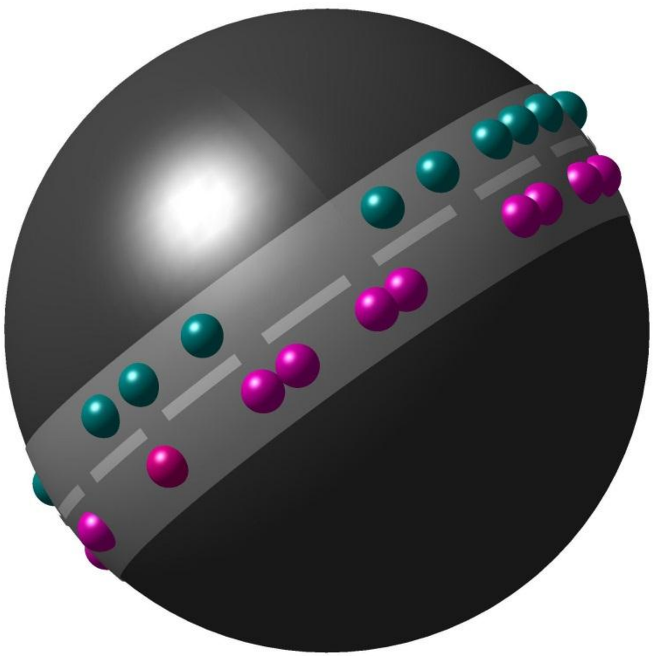
(shrnutí)

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left\| \vec{v}_i - \vec{w}_i \right\|^2 + \mathtt{C} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in I_\varepsilon(\vec{x}_i)} \eta(r_{ij})$$



- implementování termální komponenty do původně deterministického konceptu vede k vytvoření statistického souboru, jehož ustálený stav je popsán stochasticky
- tj. mikroskopické veličiny analyzované v ustáleném stavu systému jsou popsány prostřednictvím asociovaných hustot pravděpodobnosti, resp. distribučních funkcí
- statistická povaha mikroskopických dopravních veličin a jejich značná citlivost na změnu makroskopických charakteristik provozu plně koresponduje s empirickými daty

## Dopravní modifikace obecného agentního systému

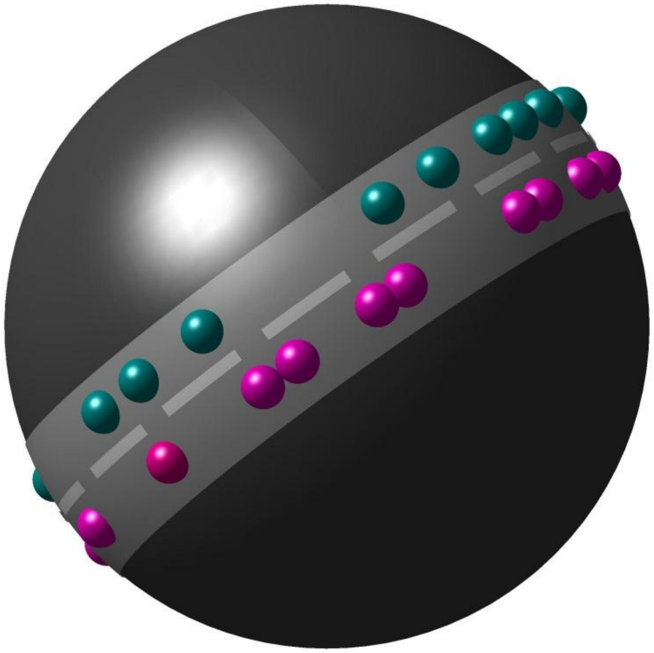


- jednorozměrný dopravní plyn
- stejná hmotnost vozidel
- stejná optimální rychlost
- párová interakce
- $g(i)=i+1$; $\mathcal{O}(x_i)=\{x_i,x_{i+1}\}$; $I=\{i+1\}$
- vyvážená mocninná repulze závislá na světlosti mezi po sobě následujícími vozidly
- koeficient psychického vypětí konstantní

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}(v_i - w)^2 + \mathtt{C}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{r_i}$$

$$r_i = \left|\varphi_{i+1} - \varphi_i\right|\frac{N}{2\pi}, \qquad \varphi_{N+1} := \varphi_1$$

## Analytické řešení dopravního modelu



- sdružená hustota pravděpodobnosti pro výskyt systému ve vybraném elementu fázového prostoru

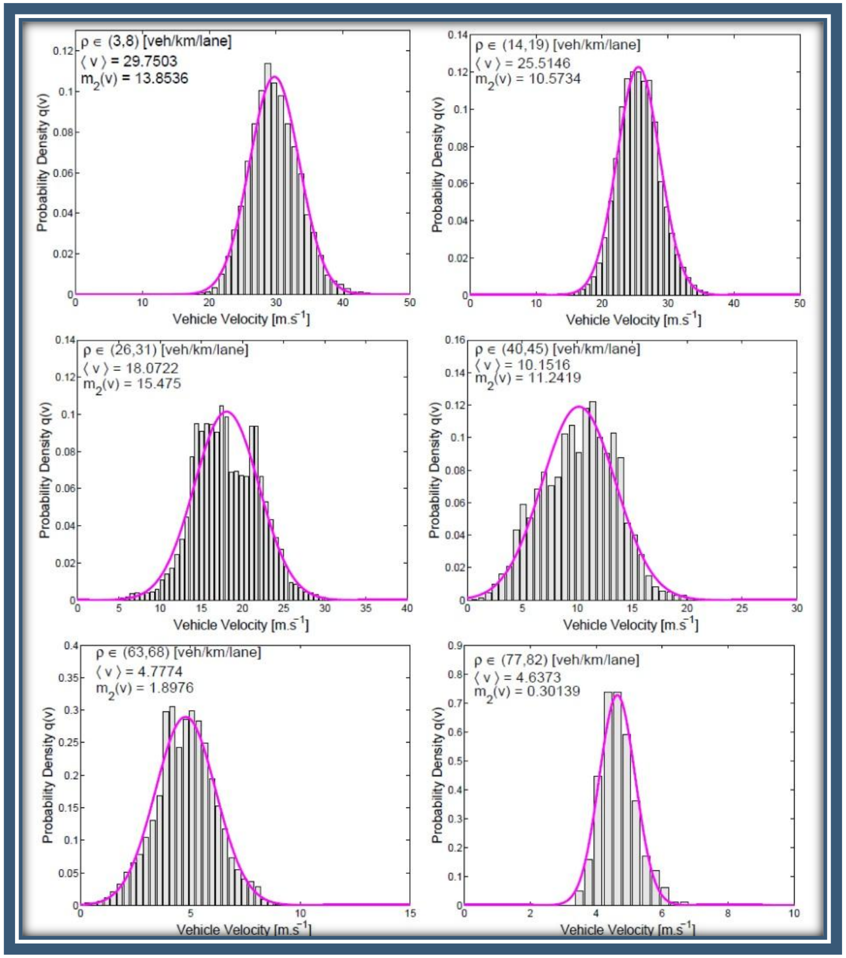
$$p(\vec{v},\vec{r}) = \frac{1}{\mathcal{Z}_N}\,\delta\left(N - \sum_{i=1}^{N} r_i\right)\prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2}\beta(v_i-w)^2}\prod_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{r_i}}$$

- partiční suma (normalizace hustoty pravděpodobnosti)

$$\mathcal{Z}_N = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \delta\left(N - \sum_{i=1}^{N} r_i\right)\prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2}\beta(v_i-w)^2}\prod_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{r_i}}\mathrm{d}r_i\mathrm{d}v_i$$

- $\delta(x-\mu)\ldots$ centrovaná Diracova distribuce nad $\mathscr{D}(\mathbb{R})$
- $\forall\chi(x)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}) : \big(\delta(x-\mu),\chi(x)\big) := \chi(\mu)$

## Hustota pravděpodobnosti pro rychlost




$$q(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(v-w)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{\mathbb{R}} q(v)\,\mathrm{d}v = 1$$

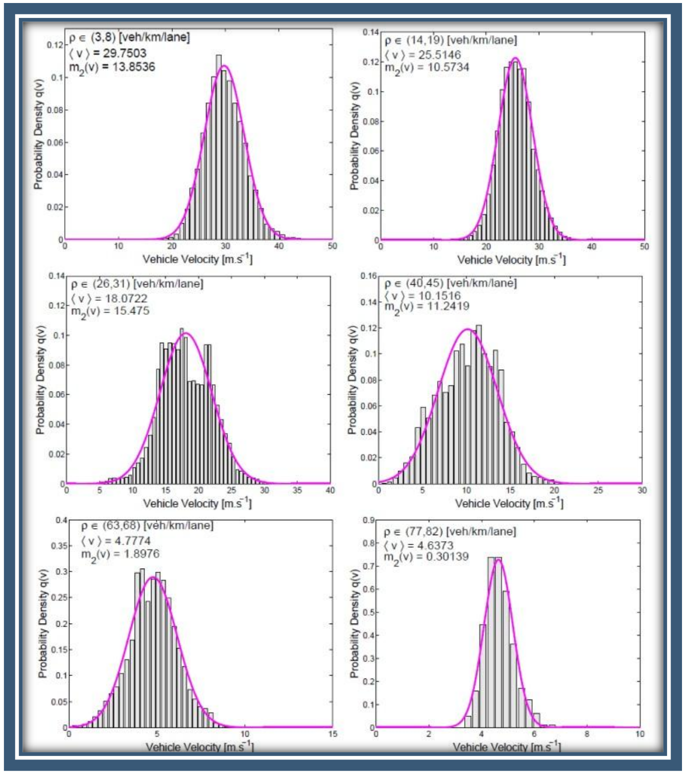
$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{m\beta}}$$

$$\mathrm{E}(v) = \int_{\mathbb{R}} v\,q(v)\,\mathrm{d}v = w$$

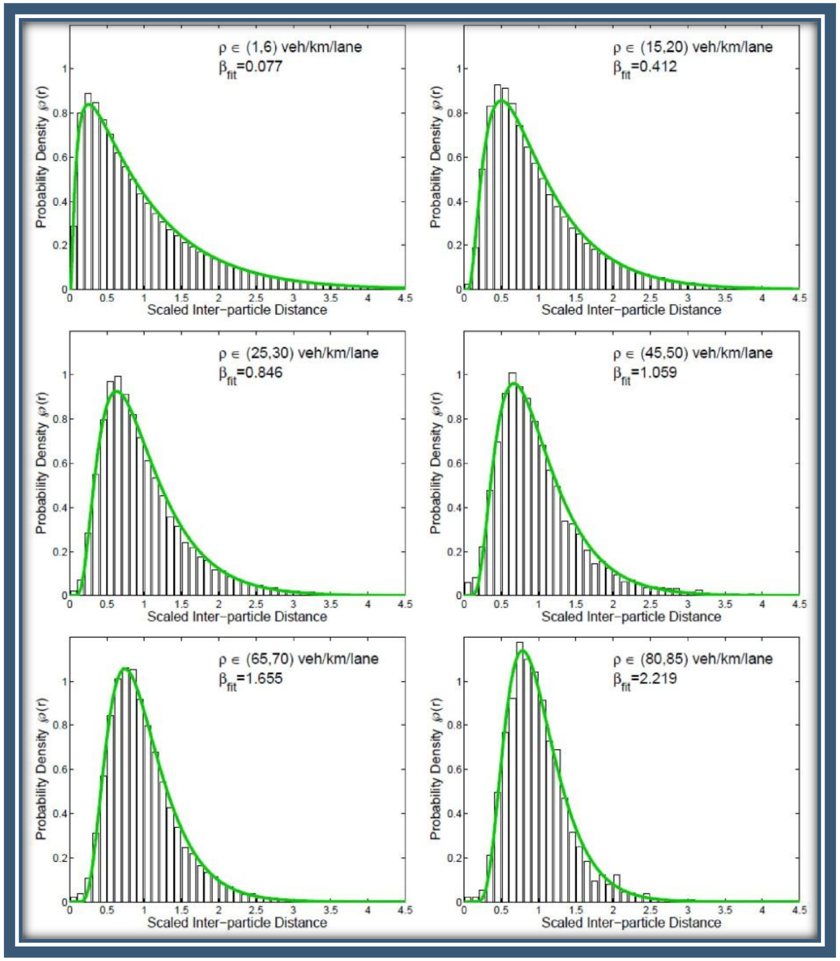
$$\mathrm{VAR}(v) = \int_{\mathbb{R}} (v-w)^2\,q(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{m\beta}$$

$$\lim_{\beta\to\infty} q(v) \overset{\mathscr{D}'}{=} \delta(v-w)$$

# Hustota pravděpodobnosti pro rychlost



# Hustota pravděpodobnosti pro světlost




$$\wp(r) = A\,\Theta(r)\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{r}}\mathrm{e}^{-Br}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \wp(r)\,\mathrm{d}r = 1$$

$$\mathrm{E}(r) = \int_{\mathbb{R}} r\,\wp(r)\,\mathrm{d}r = 1$$

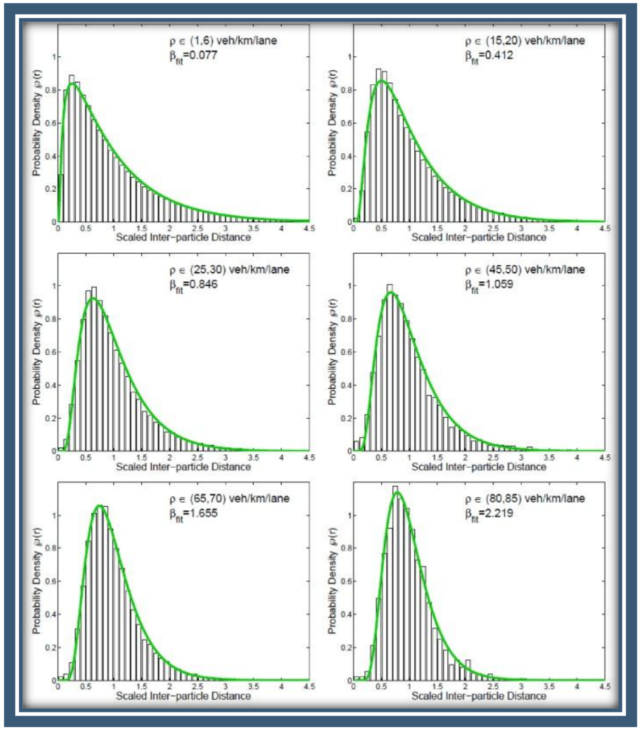
$$B = \beta + \frac{3 - \mathrm{e}^{-\sqrt{\beta}}}{2}$$

$$A^{-1} = 2\sqrt{\frac{\beta}{B}}\,\mathcal{K}_1\big(2\sqrt{B\beta}\big)$$

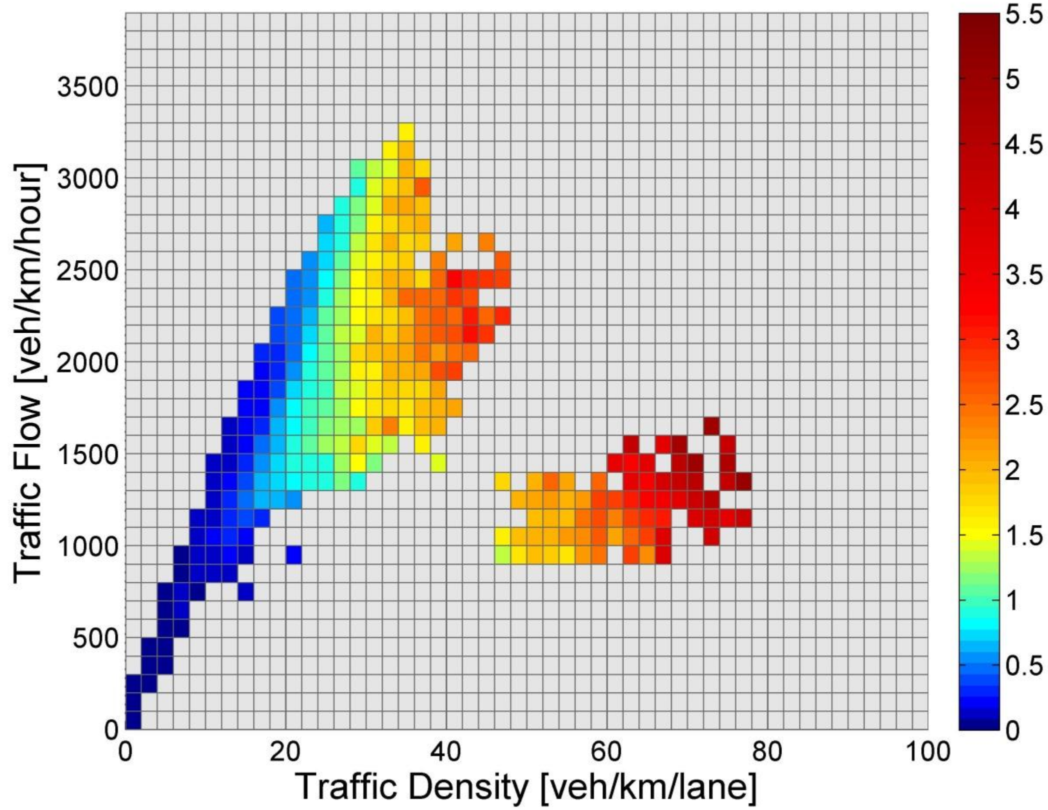
$$\lim_{\beta\to 0_+} \wp(r) \overset{\mathscr{D}'}{=} \Theta(r)\,\mathrm{e}^{-r}$$

$$\lim_{\beta\to\infty} \wp(r) \overset{\mathscr{D}'}{=} \delta(r-1)$$

# Hustota pravděpodobnosti pro světlost

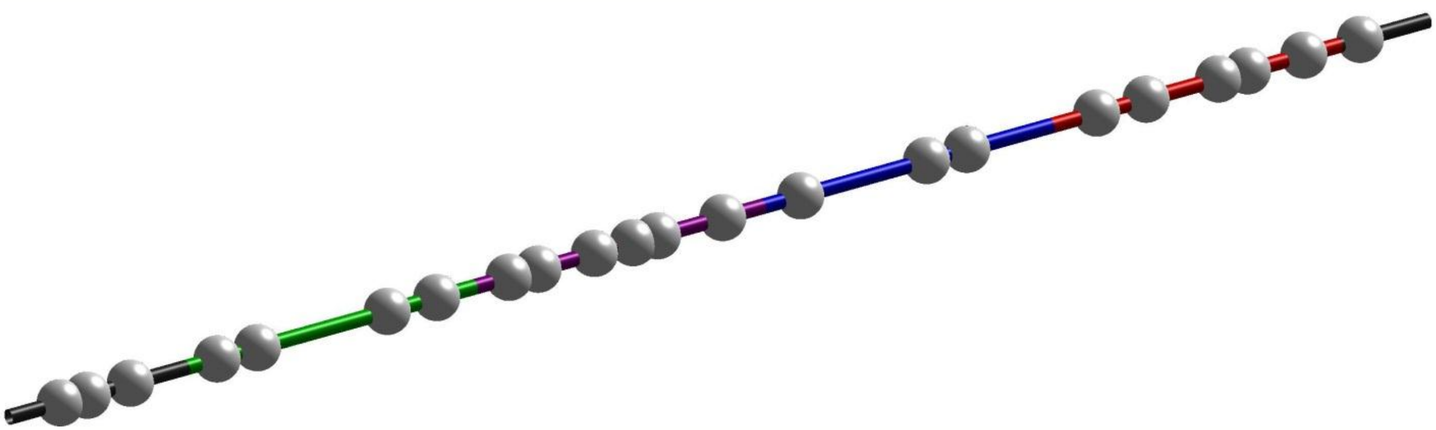


## Empirická závislost termálního parametru



# Shluková analýza dopravních systémů

- poprvé se (při použití výše uvedeného modelu) podařilo vysvětlit chování fluktuací hustot dopravních proudů
- koncept matematického popisu agentních shluků v dopravním systému je odvozen z teorie náhodných matic
- shluková analýza je reprezentována tzv. testem spektrální rigidity unfoldovaného datového souboru
- tento test umožnil nepřímou detekci psychického vypětí řidičů



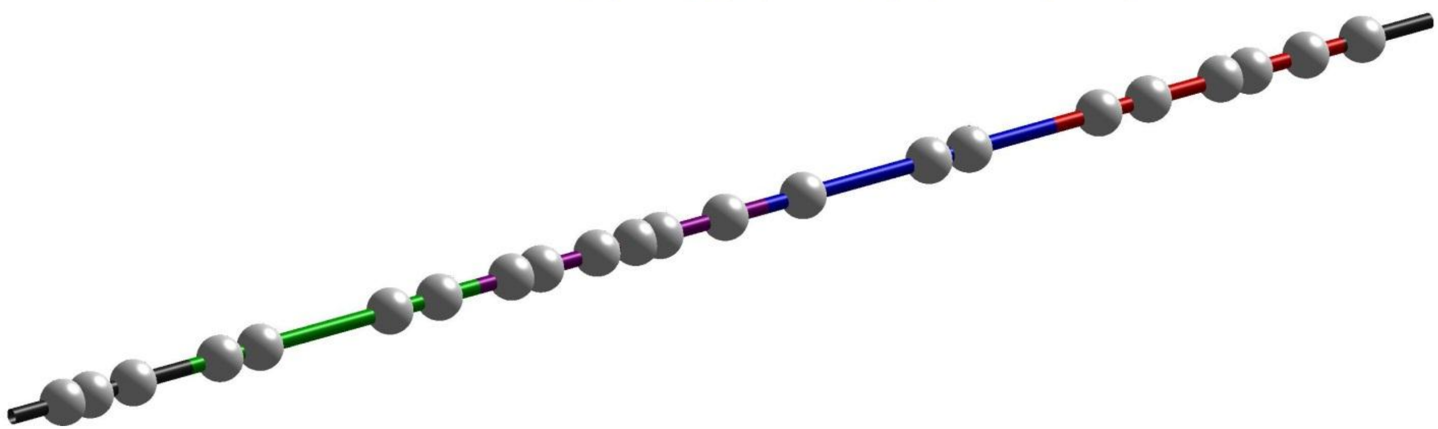
## Shluková analýza dopravních systémů

- $n_k(\ell)$ – počet vozidel v $k-$tém intervalu délky $\ell$ $(k \in \widehat{m}_\ell)$
- $\mathrm{E}\big(n(\ell)\big) = \ell$, což plyne z faktu, že vzdálenost vozidel je přeškálována na jednotkovou
- spektrální rigidita:

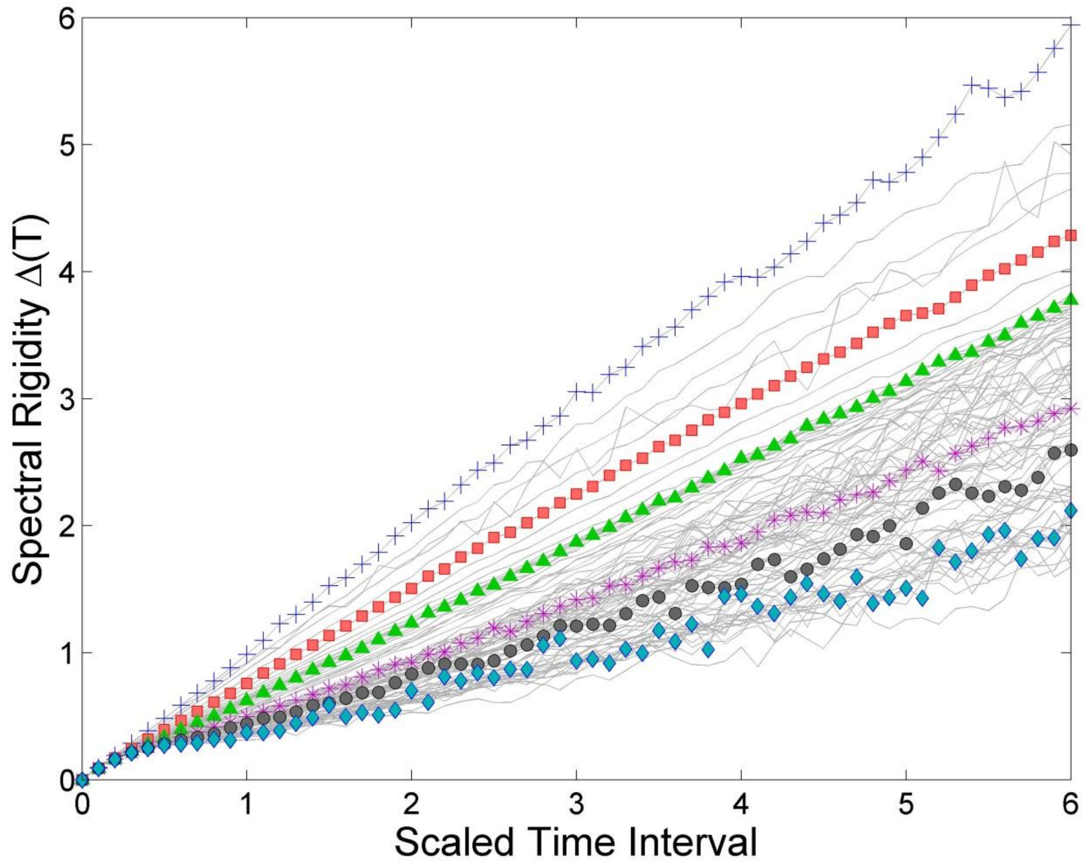
$$\Delta(\ell) = \frac{1}{m_\ell} \sum_{k=1}^{m_\ell} \big(n_k(\ell) - \ell\big)^2$$

- analytický tvar spektrální rigidity odvozený pro prezentovaný model:

$$\Delta(\ell) = \chi(\beta)\ell + \gamma(\beta) + \mathcal{O}(\ell^{-1})$$



## Shluková analýza dopravních systémů



## Shrnutí

- představili jsme koncept lokálního termodynamického plynu, jehož časová evoluce koresponduje s evolucí reálných dopravních systémů
- zavedením krátkodosahové mocninné repulze mezi částicemi modelu jsme získali socio-fyzikální alternativu tzv. Dysonova plynu
- mikrostruktura příslušného ustáleného stavu prezentovaného modelu je v detailní shodě s mikrostrukturou dopravních systémů
- pokročilé statistické testy (např. test spektrální rigidity) dále prokázali, že uvedený soulad není povrchní
- shluková analýza obou systémů totiž generuje velice podobné výstupy
- zavedený model umožnil nepřímou detekci psychického vypětí řidičů

## Původnost modelu a odezva

- představený koncept je ryze původní
- v podstatě poprvé se díky tomuto modelu podařilo předpovědět správná pravděpodobnostní rozdělení vzdáleností mezi nejbližšími vozidly
- přitom korektní predikce tzv. headway distribucí byla dlouhodobým otevřeným problémem (viz např. A. May, *Traffic Flow Fundamentals*, 1990)
- prezentovaný výzkum také přinesl novou metodiku pro zpracovávání dopravních dat (tzv. metoda unfoldingu)
- model byl v roce 2004 akceptován špičkami v oboru
- je také dále rozvíjen (celkem 73 citací – Web of Knowledge)
- tento přístup otevírá široké možnosti pro navazující výzkum

## Vybrané publikace k tématu


- M. Krbálek and P. Hrabák, *Inter-particle gap distribution and associated rigidity of spectral asymmetric simple exclusion process with open boundaries*, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011), 175203 [počet citací: 0]
- M. Krbálek, *Analytical derivation of time spectral rigidity for thermodynamic traffic gas*, Kybernetika **46-6**, 2010, 1108 [počet citací: 1]
- M. Krbálek, *Time clearance distribution and associated spectral rigidity of thermodynamic traffic gas*, Proceedings of SPMS 2010, Děčín 2010, ISBN 978-80-01-04641-8 [počet citací s: 0]
- M. Krbálek, *Discrete thermodynamical modelling of traffic streams*, Selected Proceedings of the 12th World Conference on Transport Research Society, Lisbon 2010, ISBN 978-989-96986-1-1 [počet citací s: 0]
- M. Krbálek and P. Šeba, *Spectral rigidity of vehicular streams (Random Matrix Theory approach)*, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009), 345001 [počet citací s: 3]
- M. Krbálek, *Inter-vehicle gap statistics on signal-controlled crossroads*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 205004 [počet citací s: 3]
- M. Krbálek, *Equilibrium distributions in a thermodynamical traffic gas*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007), 5813 [počet citací s: 7]
- M. Krbálek, *Dopravní systémy jako termodynamické plyny*, Československý časopis pro fyziku **5** (2005), 432 [počet citací s: 0]
- M. Krbálek and D. Helbing, *Determination of interaction potentials in freeway traffic from steady-state statistics*, Physica A **333** (2004), 370 [počet citací s: 18]
- M. Krbálek and P. Šeba, *Headway statistics of public transport in Mexican cities*, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), L1 [počet citací s: 5]
- M. Krbálek, P. Šeba, and P. Wagner, *Headways in the traffic flow - remarks from a physical perspective*, Phys. Rev. E **64** (2001), 066119 [počet citací s: 14]
- M. Krbálek and P. Šeba, *Statistical properties of the city transport in Cuernavaca (Mexico) and random matrix ensembles*, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000), L229 [počet citací s: 9]

**Děkuji za pozornost.**