

# Obsah

<b>1</b>	<b>Historie dopravního modelování</b>	<b>5</b>
1.1	Historický exkurz . . . . .	5
1.2	Padesátá léta 20. století . . . . .	5
1.3	Šedesátá léta 20. století . . . . .	6
1.4	Devadesátá léta 20. století . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Analýza dopravního systému</b>	<b>7</b>
2.1	Typický vzorek dat měřených na indukční dvojsmyčce . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Makroskopické modely dopravy</b>	<b>9</b>
3.1	Makroskopické veličiny a důležité zákonitosti mezi nimi . . . . .	9
3.2	Fundamentální hypotézy (výchozí) makroskopického dopravního modelování . . . . .	12
3.3	Rovnice makroskopické dopravní analýzy . . . . .	13
3.4	Historický přehled fundamentálních diagramů . . . . .	14
3.5	Reálné fundamentální diagramy . . . . .	17
3.6	Dvoufázová teorie . . . . .	17
3.7	Třífázová teorie . . . . .	18
3.8	Greenbergův makroskopický model . . . . .	20
3.9	Lighthillův-Whithamův dopravní model . . . . .	22
3.10	O propagační rychlosti kinematických vln, jejich rozbor . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Mikroskopická struktura dopravy a její statistické charakteristiky</b>	<b>29</b>
4.1	Typický set dopravních dat . . . . .	29
4.2	Empirické hodnoty toku, hustoty a průměrné rychlosti vzorku . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Mikroskopické modelování - termodynamický přístup</b>	<b>33</b>
5.1	Stochastická alternativa modelu . . . . .	35
5.2	Stochastický popis termodynamické alternativy souboru . . . . .	37
5.3	Odvození hustoty pravděpodobnosti pro rychlost $k$ -tého vozidla . . . . .	37
5.4	Odvození headway distribuce . . . . .	39
5.5	Dopravní data . . . . .	41
5.6	Headway-distribuce pro obecný krátkodosahový plyn . . . . .	41
5.7	Normalizace a škálování Cimrmanovy hustoty pravděpodobnosti . . . . .	47
5.8	Odvození time-clearance distribuce . . . . .	52
5.9	Technika zpracovávání empirických dat . . . . .	54
5.10	Vliv mikroskopických interakčních pravidel na makroskopické závislosti . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Teorie balancovaných distribucí</b>	<b>59</b>

<b>7</b>	<b>Multiheadway distribuce</b>	<b>63</b>
7.1	Poissonovské proudění . . . . .	63
7.2	Systém částic s logaritmickou repulzí . . . . .	64
7.3	Systém částic s vyváženým potenciálem . . . . .	64
<b>8</b>	<b>Spojité a diskrétní modely dopravy</b>	<b>67</b>
8.1	Car-following modely . . . . .	67
8.2	Model Nagela a Schreckenberga (1992) . . . . .	68
8.3	Model TASEP . . . . .	72

---

## Značení

Symbol	Význam
N	množina přirozených čísel

---

# PŘEDMLUVA

*Poděkování:*

*autor*

# Kapitola 1

## Historie dopravního modelování

*The volume of vehicular traffic in the past several years has rapidly outstripped the capacities of the nation's highways. It has become increasingly necessary to understand the dynamics of traffic flow and obtain a mathematical description of the process.*

— Harold Greenberg (1959)

Návrh: co třeba dát na začátek každé kapitoly nějaký citát od matematiků vyskytujících se v dané kapitole? Doplnit sem takovéto hezké povídání okolo plus možná nějaké obrázky z těch článků, jak začínali. Snažila jsem se dohledat křestní jména všech matematiků, nicméně u některých jsem byla neúspěšná.

### 1.1 Historický exkurz

Začátek výzkumu v oblasti dopravních systémů.

- 1934 : Bruce D. **Greenshields**, *The photographic method of studying traffic behavior*, Proceeding of 13th Annual Meeting Highway Research Board.
- 1935 : Bruce D. **Greenshields**, *Study of highway capacity (special report on traffic theory)*, Proceeding of 14th Annual Meeting Highway Research Board.

### 1.2 Padesátá léta 20. století

- 1955 : Michael James **Lighthill** a Gerald Beresford **Whitham**, *On kinematic waves (a theory of traffic flow on long crowded roads)*, Proceedings of Royal Society, London, 229.
- 1956 : Paul I. **Richards**, *Shock waves on the highway*, Operation Research 4, 42.
- 1959 : Harold **Greenberg**, *An analysis of traffic flow*, Operation Research 7, 79.
- 1959 : Sergei K. **Godunov**, *A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations*, Matematiceskij Sbornik 47, 271.

### 1.3 Šedesátá léta 20. století

- **1961** : R. T. **Underwood**, *Speed, volume and density relationships*, Quality and Theory of Traffic Flow, Bureau of Highway Traffic, Yale University, New Haven, Connecticut.
- **1966** : A. C. **Dick**, *Speed/flow relationships within an urban area*, Traffic Engineering Control **8**, 393.
- **1967** : Joseph S. **Drake**, *A statistical analysis of speed density hypothesis*, Highway Research Record **154**, 53.
- **1967** : Louis A. **Pipes**, *Car following models and the fundamental diagram of road traffic*, Transportation Research **1(1)**, 21.
- **1969** : Elliott W. **Montroll**, *Three examples of one-dimensional systems*, Symposium of Contemporary Physics, Trieste, 177.
- **1971** : P. K. **Munjal** and Louis A. **Pipes**, *Propagation of on-ramp density perturbation on unidirectional and two- and three-lane freeways*, Transportation Research **5(4)**, 241.

### 1.4 Devadesátá léta 20. století

Faktický začátek systematické dopravní vědy.

- **1992** : O. **Biham**, A.A. **Middleton** a D. **Levine**, *Self-organization and a dynamical transition in traffic flow models*, Physical Review A **46(10)**, R6124.
- **1992** : Bernard **Derrida**, E. **Domany** a D. **Mukamel**, *An exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries*, Journal of Statistical Physics **69 (3/4)**, 667.
- **1992** : Kai **Nagel** a Michael **Schreckenberg**, *A cellular automaton model for freeway traffic*, Journal of Physics I France **2**, 2221.
- **1993** : Boris S. **Kerner** a P. **Konhäuser**, *Cluster effect in initially homogeneous traffic flow*, Physical Review E **48**, R2335.
- **1994** : Boris S. **Kerner** a P. **Konhäuser**, *Structure and parameters of clusters in traffic flow*, Physical Review E **50**, 54.
- **1996** : Minoru **Fukui** a Yoshihiro **Ishibashi**, *Traffic flow in 1D cellular automaton model including cars moving with high speed*, Journal of Physical Society of Japan **65(6)**, 1868.

## Kapitola 2

# Analýza dopravního systému

Osнова dle prezentace z webu a dle článku z webu:

- Dopravní systém
- Znaky dopravního systému
- Metody studia dopravních systémů
- Metody modelování dopravního proudu
- Dopravní experimenty
- Dopravní monitoring

### 2.1 Typický vzorek dat měřených na indukční dvojsmyčce

1. Průběžný čas  $\tau_k$
2. Číslo pruhu  $l_k$
3. Individuální obsazenost (occupancy)  $o_k$
4. Časová prodleva (gap time)  $g_k$
5. Čas přejezdu smyčky (travel time)  $h_k$
6. Rychlost vozidla  $v_k$
7. Délka vozidla  $d_k$
8. Kategorie vozidla (car, trc, van, car with trailer c+t, mot, bus, track with trailer t+t)

Definice:

$$o_k = \tau_3 - \tau_2$$

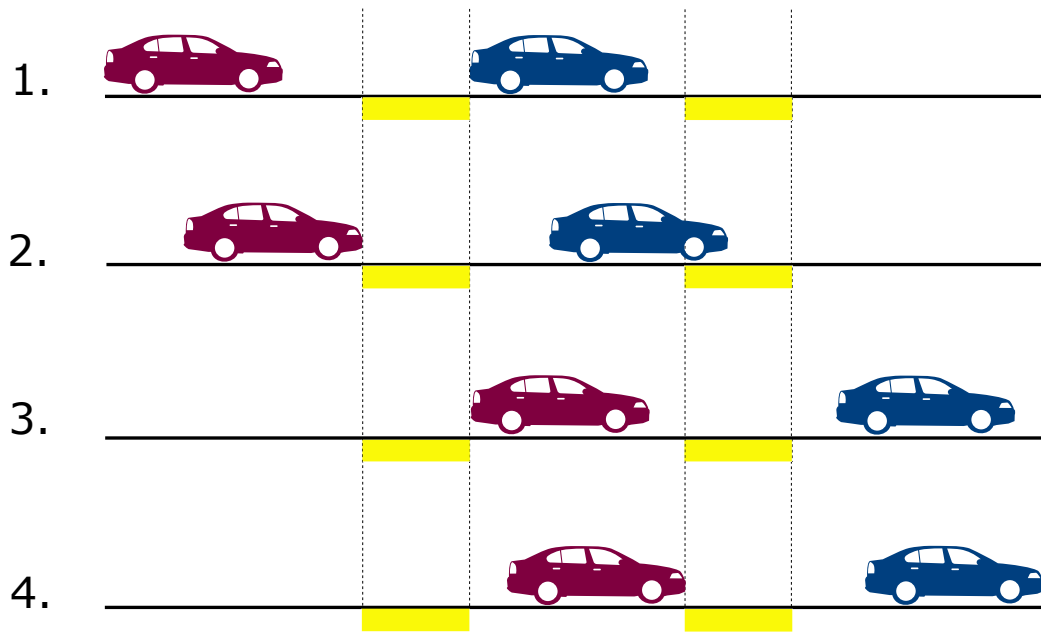
$$g_k = \tau_2 - \tau_1$$

$$h_k = \tau_4 - \tau_2$$

Kontinuální čas:

$$o_k + g_k$$

– zdůvodnění: volba  $\tau_1 = 0$ , tedy  $g_k = \tau_2$ , pak  $\tau_3 = o_k + \tau_2 = o_k + g_k$



**Obrázek 2.1**

Ilustrace k definicím veličin měřených na indukční dvojsmyčce, fialové auto reprezentuje  $k$ -té vozidlo.



## Kapitola 3

# Makroskopické modely dopravy

### 3.1 Makroskopické veličiny a důležité zákonitosti mezi nimi

Empirické alternativy

**Dopravní hustota**

$$\rho(x, \tau) = \frac{\Delta N}{\Delta x} \quad [\text{veh} \cdot \text{km}^{-1}]$$

**Dopravní tok**

$$J(x, \tau) = \frac{\Delta N}{\Delta \tau} \quad [\text{veh} \cdot \text{h}^{-1}]$$

**Obsazenost:** po jakou dobu byl v průměru detektor obsazen (vyjádřeno poměrně)

$$O(x, \tau) = \frac{\sum_{i=1}^N o_i}{\Delta \tau} \quad [-]$$

**Globální rychlost skupiny  $N$ -vozidel**

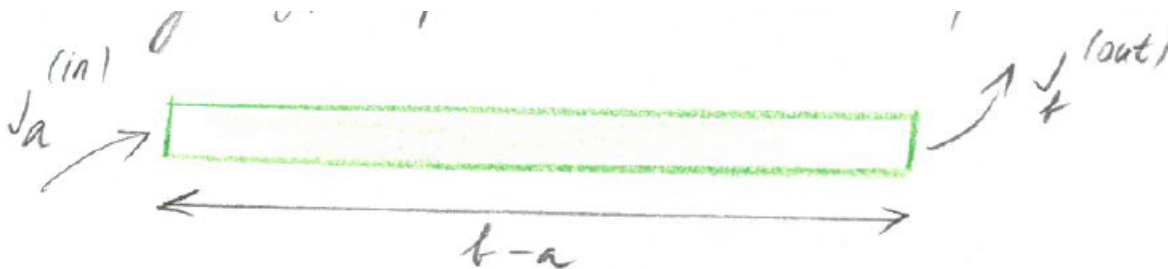
$$V(x, \tau) \quad [\text{km} \cdot \text{h}^{-1}]$$

→ hledáme vztah mezi nimi

**Aproximativní vztah** odvozený z dynamiky kapalin

$$J = \frac{\Delta N}{\Delta \tau} = \frac{\Delta N}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \rho V$$

**Rovnice kontinuity** vyjadřující zákon zachování počtu vozidel



**Obrázek 3.2**  
Ilustrace k rovnici kontinuity

počet vozidel uvnitř:  $N = \int_a^b \varrho(x, \tau) dx$

časová změna počtu vozidel:  $J(x, \tau) = \frac{\partial N}{\partial \tau} = \int_a^b \frac{\partial \varrho}{\partial \tau} dx$  (diskuze k záměně integrálu a derivace)

zachování počtu:

$$\int_a^b \frac{\partial \varrho}{\partial \tau} dx = J(a, \tau) - J(b, \tau) = [-J(x, \tau)]_a^b = - \int_a^b \frac{\partial J}{\partial x}(x, \tau) dx$$

předchozí rovnost platí pro všechna  $a, b \in \mathbf{R}$ , kde BÚNO  $a < b$  :

$$\int_a^b \left( \frac{\partial \varrho}{\partial \tau} + \frac{\partial J}{\partial x} \right) dx = 0$$

pak tedy platí skoro všude

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

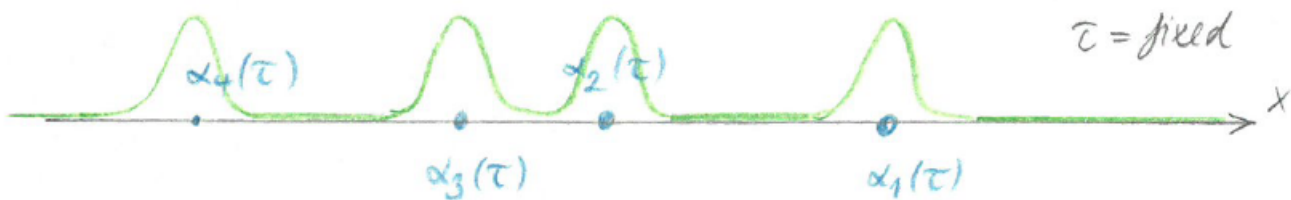
→ nyní přejdeme k **matematické formulaci** makroskopických dopravních veličin, ty jsou odvozeny od tzv. vyhlazeného počtu částic (klademe si otázku: jak zderivovat počet částic?)

– počet částic na intervalu  $(-\infty, x)$

$$N = N(x, \tau) := \int_{-\infty}^x \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}}}_{\chi(y, \tau)} dy,$$

kde  $\chi(y, \tau)$  značí vyhlazený počet částic (konečná suma, záměna bude OK),  $\sigma > 0$ ,  $\alpha_1(0) > \alpha_2(0) > \dots > \alpha_n(0)$  a ve funkcích  $\alpha_i(\tau)$  je schován pohyb částic, neboť pro všechna  $i \in \hat{n}$  a všechna  $\tau \in \mathbf{R}^+$  platí  $\frac{d\alpha_i}{d\tau} > 0$  (zajišťují pohyb částic zleva doprava) → platí  $N(x, \tau) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$  a vyhlazení dává dobrý smysl, neboť  $N(\mathbf{R}, \tau) = n$ , pokud zavedeme notaci

$$N(A, \tau) := \int_A \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}} dy,$$



**Obrázek 3.3**  
Ilustrace k vyhlazení počtu částic

teď již můžeme definovat dopravní (částicový) tok

$$J := -\frac{\partial N}{\partial \tau},$$

kde mínus je pouhopouhá konvence značící ubývání a přibývání částic - pokud je tok kladný, pak částic v množině  $(-\infty, x)$  ubývá, a dopravní (částicovou) hustotu

$$\varrho := \frac{\partial N}{\partial x}$$

předpokládáme také fundamentální závislost  $J = J(\rho)$   
 využijme nyní těchto definic a vyjádřeme  $\rho$  a  $J$ , tedy

$$\rho(x, \tau) = \chi(x, \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}}$$

a

$$\begin{aligned} J(x, \tau) &= - \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi(y, \tau)}{\partial \tau} dy = - \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{y - \alpha_i(\tau)}{\sigma^2} \frac{d\alpha_i(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{(y-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}} dy = \\ &= - \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{y - \alpha_i(\tau)}{\sigma^2} v_i(\tau) e^{-\frac{(y-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}} dy = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} v_i(\tau) \left[ e^{-\frac{(y-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^x = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{v_i(\tau)}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

ověření platnosti zákona zachování:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{x - \alpha_i(\tau)}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}} v_i(\tau)$$

a

$$\frac{\partial J}{\partial x} = - \sum_{i=1}^n \frac{v_i(\tau)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{x - \alpha_i(\tau)}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}},$$

odkud  $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$

zákon zachování je tedy triviálním důsledkem vyhlazení počtu částic, neboť hladká funkce má záměnné všechny parciální derivace, což je po dosazení výše zavedených definic do zákona zachování zřejmé

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( - \frac{\partial N}{\partial \tau} \right) = 0$$

**limitní chování hustoty** pro minimální rozptyl  $\sigma$  (bezrozměrné body), tj. hledáme  $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \rho(x, \tau)$  v  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0+} (\rho(x, \tau); \varphi(x)) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}}; \varphi(x) \right) = \sum_{i=1}^n \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}} \varphi(x) dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} y = \frac{x-\alpha_i(\tau)}{\sigma} \\ dx = \sigma dy \end{array} \right| = \sum_{i=1}^n \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \varphi(y\sigma + \alpha_i(\tau)) dy = \left| \left| f(y, \tau) \right| \leq \text{Ke}^{-\frac{y^2}{2}} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}) \right| = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \varphi(\alpha_i(\tau)) dy = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(\alpha_i(\tau)) \sqrt{2\pi} = \sum_{i=1}^n \varphi(\alpha_i(\tau)) = \left( \sum_{i=1}^n \delta_{\alpha_i(\tau)}; \varphi(x) \right) \end{aligned}$$

tedy

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \rho(x, \tau) \stackrel{\mathcal{D}'(\mathbf{R})}{=} \sum_{i=1}^n \delta_{\alpha_i(\tau)} = \sum_{i=1}^n \delta(x - \alpha_i(\tau))$$

**Rovnice ustáleného proudění:**

- stacionární proudění: rychlost proudění se nemění v čase, tj.  $v_i(\tau) = V$

- ustálené proudění: všechny částice mají stejnou rychlost, tj.  $v_i(\tau) = V(\tau)$

východisko:  $\forall i \in \hat{n} : v_i(\tau) = V(\tau)$ , pak

$$J = V(\tau) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\alpha_i(\tau))^2}{2\sigma^2}} = V(\tau) \varrho(x, \tau)$$

navíc, pokud označíme  $\beta_i$  lokaci  $i$ -té částice,

$$\alpha_i(\tau) = \int_0^\tau V(t) dt + \beta_i = w(\tau) + \beta_i,$$

kde  $w(0) = 0$ , pak

$$\varrho(x, \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-w(\tau)-\beta_i)^2}{2\sigma^2}}$$

### Zákonitosti:

- pro ustálené proudění, tedy předpokládáme  $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ ,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} = -\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (V(\tau) \varrho(x, \tau)) = -V(\tau) = \frac{\partial \varrho}{\partial x},$$

tj. roste-li hustota ve směru osy  $x$ , postupem času v daném fixovaném bodě hustota vozidel klesá

•

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{x - w(\tau) - \beta_i}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-w(\tau)-\beta_i)^2}{2\sigma^2}} \frac{dw}{d\tau},$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{x - w(\tau) - \beta_i}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-w(\tau)-\beta_i)^2}{2\sigma^2}},$$

odkud

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} = -\frac{dw}{dt} \frac{\partial \varrho}{\partial x}$$

## 3.2 Fundamentální hypotézy (východiska) makroskopického dopravního modelování

1. Stav dopravního systému je plně popsán třemi veličinami

- dopravní hustota  $\varrho(x, \tau)$ ,
- dopravní tok  $J(x, \tau)$ ,
- rychlost dopravního proudění  $V(x, \tau)$ .

2. Fundamentálními dopravními zákonitostmi rozumíme  $J = J(\varrho)$  a  $V = V(\varrho)$  - grafy těchto závislostí nazýváme fundamentálními diagramy.

3. Nemění-li se hustota provozu, není důvod ke změně průměrné rychlosti v prostoru, tj.

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{\varrho=\text{konst}} = 0,$$

odkud: máme  $V = V(\rho, x, \tau)$ , neboť  $\rho = \rho(x, \tau)$ , vyjádříme

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x},$$

pokud  $\rho = \text{konst}$ , obdržíme

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{\rho=\text{konst}},$$

tedy

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{\rho=\text{konst}} = 0,$$

tedy vypouštíme ze závislosti  $x$ , tj.  $V = V(\rho, \tau)$

4. Nemění-li se hustota provozu v čase, není důvod ke změně rychlosti proudění v čase, tj.

$$\frac{dV}{dx} \Big|_{\rho=\text{konst}} = 0,$$

odkud zjišťujeme, že můžeme ze závislosti vypustit taktéž  $\tau$ , celkem tedy dochází ke zjednodušení vztahu na závislost  $V = V(\rho)$  - obdobně vše platí i pro tok, tj.  $J = J(\rho)$  (máme tedy co do činění s křivkami, můžeme tedy opravdu mluvit o fundamentálních diagramech)

### 3.3 Rovnice makroskopické dopravní analýzy

$H(x, \tau)$  a  $x = V \cdot \tau$  ( $V$  je konstantní)

obecné pravidlo: označme  $\tilde{H}(\tau)$  složenou funkci  $H \circ x$ , tj.  $\tilde{H} = \tilde{H}(\tau)$ , odtud

$$\frac{d\tilde{H}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial H}{\partial \tau} = V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \tau}$$

$\frac{dH}{d\tau}$  ... časová změna veličiny  $H(x, \tau)$  v souřadném systému pohybujícím se rychlostí  $V = K$   
 nyní položme  $H(x, \tau) = \rho(x, \tau)$  a sledujme změny hustoty (časové) v souřadném systému, který se pohybuje rychlostí  $V$  (s kolonou), pak tedy

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\partial J}{\partial x} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho V) + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} V - \rho \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x}$$

velmi neformální odvození (odvodit formálně):

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\rho(x, \tau) \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x}$$

- Roste-li rychlost vozidel podél vozovky, pak nutně klesá hustota vozidel v čase.
- Naopak, roste-li v čase hustota vozidel, jejich dopředná rychlost klesá.
- Hustota  $\rho(x, \tau)$  ale nemůže nikdy klesnout pod nulu, protože klesne-li  $\rho(x, \tau)$  na nulu, je  $\frac{d\rho}{d\tau} = 0$  a  $\rho(x, \tau)$  zůstane navždy nulovou.

### 3.4 Historický přehled fundamentálních diagramů

Vztah  $J = \rho V$  užíváme lokálně při konstantní  $\rho$

#### 3.4.1 Před rokem 1935

rychlost je konstantní, nevytvářela se kongesce



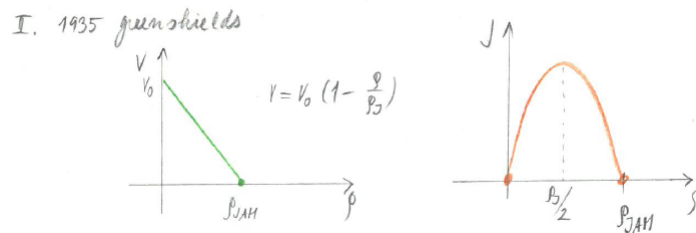
Obrázek 3.4  
Před rokem 1935

#### 3.4.2 Greenshields (1935)

$$V = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_J}\right),$$

$$J = V_0 \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_J}\right),$$

kde  $\rho_J$  je kritická hodnota



Obrázek 3.5  
Greenshields

#### 3.4.3 Greenberg (1939)

$$V = V_0 \ln\left(\frac{\rho_J}{\rho}\right)$$

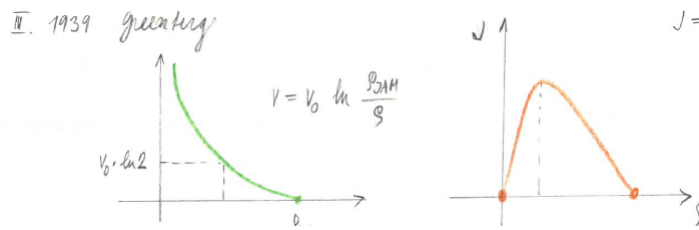
$$J = V_0 \rho \ln\left(\frac{\rho_J}{\rho}\right)$$

víme, že  $J(\rho_J) = 0$  a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} K x \ln\left(\frac{C}{x}\right) = 0,$$

odkud tedy  $J(0_+) = 0$

zjišťujeme též, že  $\rho_{MAX} = \frac{\rho_J}{e}$  čili není ve středu, ale je mírně vlevo oproti Greenshieldsovu modelu, kde  $\rho_{MAX} = \frac{\rho_J}{2}$



Obrázek 3.6  
Greenberg

### 3.4.4 Underwood (1961)

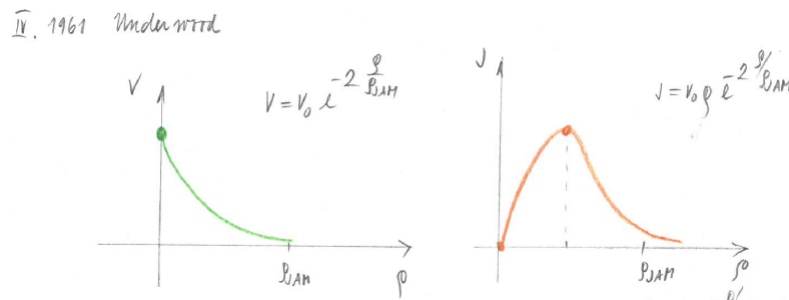
$$V = V_0 e^{-2 \frac{\rho}{\rho_J}}$$

$$J = V_0 \rho e^{-2 \frac{\rho}{\rho_J}}$$

$$\frac{dJ}{d\rho} = V_0 \left(1 - 2 \frac{\rho}{\rho_J}\right) e^{-2 \frac{\rho}{\rho_J}} \stackrel{!}{=} 0,$$

odtud

$$\rho_{MAX} = \frac{1}{2} \rho_J$$



Obrázek 3.7  
Underwood

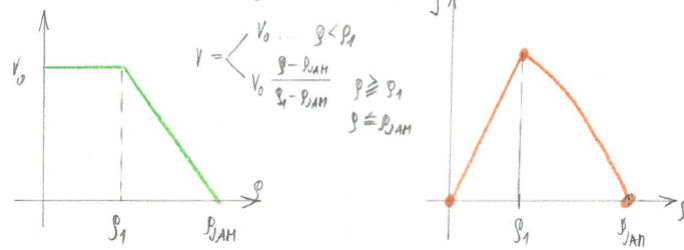
### 3.4.5 Dick (1966)

Dvouřezimový přístup,  $\rho_1 \dots$  kritická hodnota  
první případ ... volná doprava, druhý případ ... kondenzovaná doprava

$$V = \begin{cases} V_0 & \dots & 0 \leq \rho < \rho_1 \\ V_0 \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1 - \rho_1} & \dots & \rho \geq \rho_1 \wedge \rho \leq \rho_J \end{cases}$$

$$J = \begin{cases} V_0 \rho & \dots & 0 \leq \rho < \rho_1 \\ V_0 \rho \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1 - \rho_1} & \dots & \rho \geq \rho_1 \wedge \rho \leq \rho_J \end{cases}$$

V. Dick 1966 (dvouřáznový přístup)



Obrázek 3.8  
Dick

### 3.4.6 Drake (1967)

$$V = V_0 e^{-2 \frac{\rho^2}{\rho_J^2}}$$

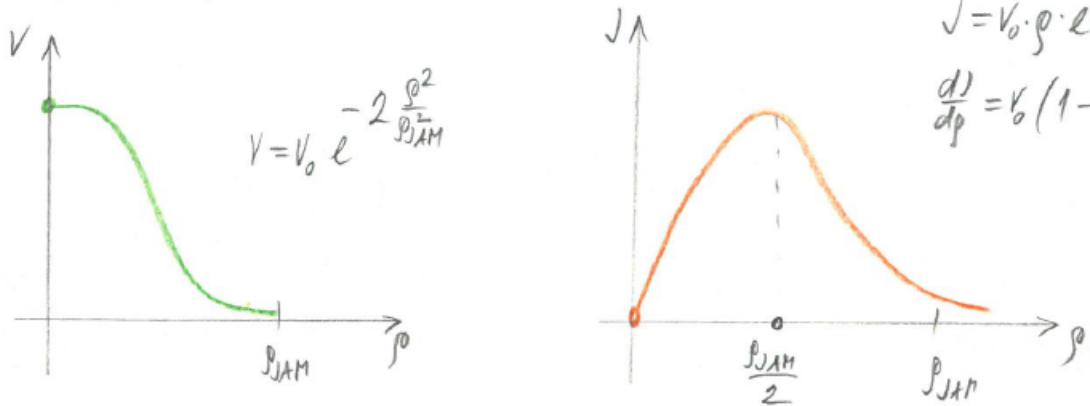
$$J = V_0 \rho e^{-2 \frac{\rho^2}{\rho_J^2}}$$

$$\frac{dJ}{d\rho} = V_0 \left( 1 - 4 \frac{\rho^2}{\rho_J^2} \right) e^{-2 \frac{\rho^2}{\rho_J^2}} \stackrel{!}{=} 0,$$

odkud

$$\rho_{\max} = \frac{1}{2} \rho_J$$

VI. Drake 1964



Obrázek 3.9  
Drake

### 3.4.7 Pipes (1971)

pro  $n \geq 1$

$$V = V_0 \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_J} \right)^n$$

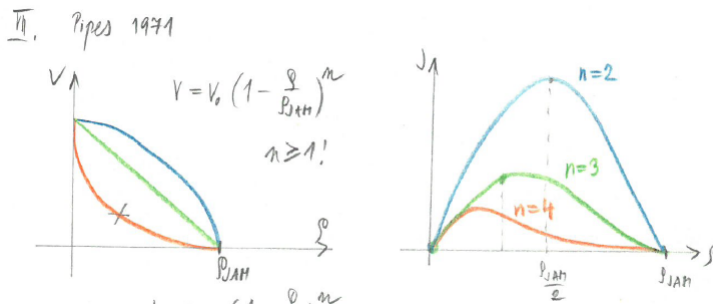
$$J = V_0 \rho \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_J} \right)^n$$



$$\frac{dJ}{d\rho} = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{JAH}}\right)^n - V_0 \frac{\rho}{\rho_{JAH}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{JAH}}\right)^{n-1} \stackrel{!}{=} 0,$$

odkud

$$\rho_{MAX} = \frac{1}{n+1} \rho_{JAH}$$



Obrázek 3.10  
Pipes

### 3.5 Reálné fundamentální diagramy

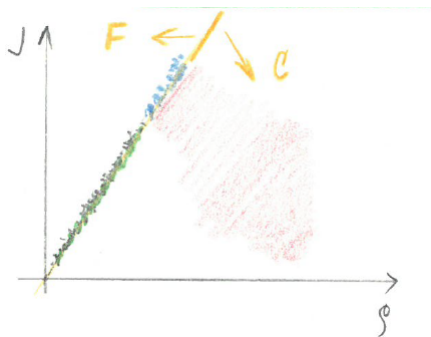
F... free traffic (volná doprava)

C... congested traffic (kondenzovaná doprava)

... .. metastabilní volná doprava - extrasatureované stavy

...

součástí kondenzované dopravy jsou i stop-and-go vlny



Obrázek 3.11  
Reálný fundamentální diagram

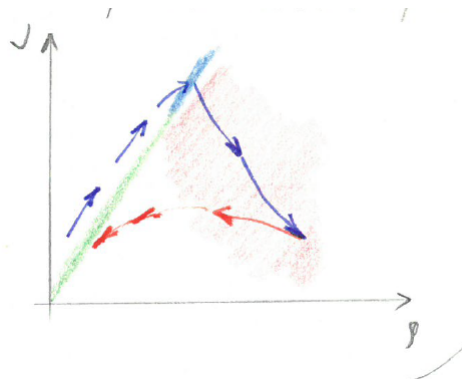
### 3.6 Dvoufázová teorie

Existují pouze dvě fáze - F a C.

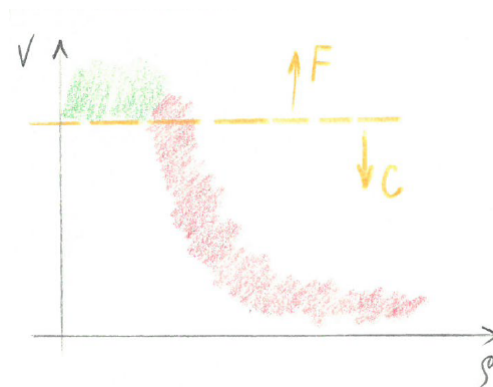
Rozprášení dat po fundamentálním diagramu je způsobeno statistickou povahou mikroskopických veličin (individualitou řidiče apod).

Pohyb vzorku po fundamentálním diagramu: při houstnoucích tocích a poté při řídnoucí hustotě - nárůst dopravní hustoty, zředování proudu - tzv. **dopravní hystereze** (tzv. reverzní  $\lambda$ ).

Helbing, Treiber, ...



Obrázek 3.12  
Dopravní hystereze



Obrázek 3.13  
Změna rychlosti s hustotou

### 3.7 Třífázová teorie

Kerner, Sauter, . . .

Jedná se, jak uvádí sám Kerner, o kvalitativní teorii. Jde o to, že kondenzovaná doprava má dvě zřetelně odlišitelné podfáze.

#### 1. Synchronizovaný tok

- Obvykle je fixována na bottleneck.
- Propagační rychlost kongesce není charakteristickou vlastností proudu (různě fluktuuje).
- Je charakteristická tzv. synchronizačním efektem, kdy se synchronizuje rychlost vozidel, ale pohyb vozidel není drasticky omezen.
- Jedná se o kontinuální proudění bez zastavování.

#### 2. Wide moving jam (rozsáhlá kongesce)

- Tato fáze je charakteristická neměnnou propagační rychlostí kongesce, která je tedy základní charakteristikou tohoto typu proudění.
- Celý vzorek (jako lokální struktura) se propaguje skrze ostatní typy fází.
- Propagační rychlost je stejná pro různé wide moving jam.
- Moving jam odráží propagaci kongesce jako uceleného pevně spojeného shluku vozidel.

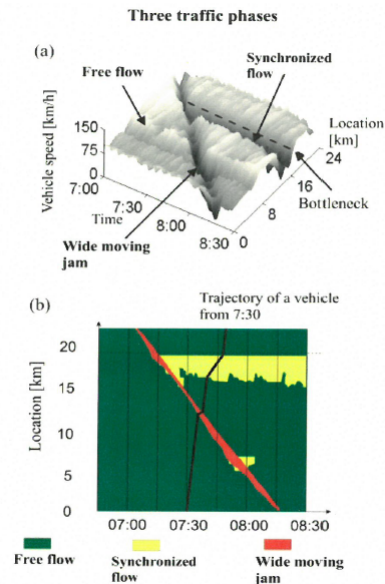
- I když rychlost jednoho vozidla uvnitř kongesce může být nulová, propagační rychlost kongesce se zachovává - proto slovo wide.

Rozlišit tyto dvě podfáze není možno pouze ve fundamentálním diagramu. Je třeba studovat časoprostorový vývoj rychlosti  $V = V(x, \tau)$  (nelze užít k detekci indukční smyčku, je třeba užít letecké snímkování).

### 3.7.1 Fundamentální hypotéza třífázové teorie

- Uvažujeme hypotetické stavy synchronizovaného proudění, kdy se všechna vozidla pohybují stejnými časově nezávislými rychlostmi udržujíc stále stejnou vzdálenost mezi každými dvěma sousedními vozidly.
- Tyto hypotetické stavy, ačkoli zidealizované, pokrývají i přes silné zjednodušení dvoudimenzionální oblast ve flow-density plane ( $J = J(\rho)$ ).
- To značí, že na úsečce  $V = \text{konst}$  se ve flow-density plane mohou vyskytovat stavy s nespočetnou množinou hustot v dané oblasti  $\langle \rho_1, \rho_2 \rangle$ .
- Také při konstantní hustotě lze detekovat nespočetnou pestrost rychlostí  $\langle V_1, V_2 \rangle$ .

→ ve třífázové teorii nelze hovořit o fundamentálním diagramu!



Obrázek 3.14  
Třífázová teorie



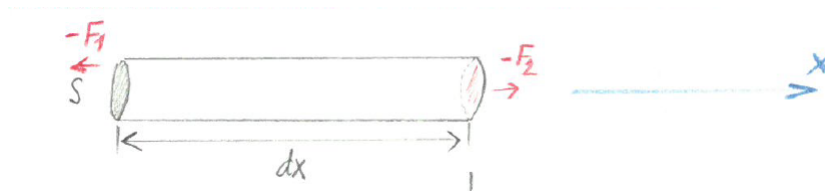
Obrázek 3.15  
Synchronized flow



Obrázek 3.16  
Wide moving jam

### 3.8 Greenbergův makroskopický model

#### 3.8.1 Odvození pohybové rovnice pro jednodimenzionální kapalně proudění



Obrázek 3.17  
Ilustrace kapalinového proudění

máme  $F_1 = p_1 \cdot S$  a  $F_2 = p_2 \cdot S$   
obecně  $m a_x = \sum_k F_k$ , tedy

$$m a_x = -F_2 + F_1 = -(p_2 - p_1) S = -\Delta p S,$$

odkud

$$a_x = -\frac{\Delta p S}{m} = -\frac{\Delta p S}{\rho S \Delta x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

**pozor  $V$  zde značí objem, přeznačit!**

vezmeme-li v potaz stavovou rovnici  $\frac{pV}{T} = \text{konst}$  a  $T = \text{konst}$ , tedy že  $pV = p \frac{m}{\rho} = \text{konst}$ , odkud již  $p = K \rho$

celkem tedy máme pro kapalinu po zavedení  $K = c^2$  a nahrazení diference parciální derivací

$$a_x = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.1)$$

#### 3.8.2 Výchozí Greenbergova modelu

Předpokládá se, že se doprava chová jako spojitá kapalina. Využijeme vztahu (3.1), a to

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x'}$$

odkud ze znalosti faktu  $V = V(x, \tau)$  obdržíme

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Ze znalosti  $J = \rho V$  a  $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$  máme

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

Ze znalosti  $V = V(\rho)$  vyjádříme

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{dV}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \quad \text{a} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Nyní označme  $V' = \frac{dV}{d\rho}$  a dosadíme (3.4) do (3.2), tj.

$$V' \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + V V' \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

odkud

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \left( V + \frac{c^2}{V' \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Obdobně aplikujeme vztah (3.4) na vztah (3.3), tj.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho V' \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

odkud opět

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + (V + \rho V') \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Greenbergův model tedy spočívá v řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic, jež má po přepsání do maticového formalismu následující tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & V + \frac{c^2}{V' \rho} \\ 1 & V + \rho V' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

### 3.8.3 Řešení Greenbergova modelu

Ihned jako první řešení soustavy (3.5) je nám známé triviální řešení, a sice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

odkud máme

$$\rho(x, \tau) = \text{konst.}$$

Mnohem zajímavější ale bude to netriviální, které získáme použitím Frobeniovy věty. Ta pro nás nyní stěžejní část říká, že determinant matice soustavy je nulový (matice soustavy tedy obsahuje alespoň jeden lineárně závislý sloupec) právě tehdy, když existuje netriviální řešení soustavy (3.5), což v tomto konkrétním případě znamená

$$V + \rho V' - V - \frac{c^2}{\rho V'} = 0,$$

odkud

$$\frac{dV}{d\rho} = \pm \frac{C}{\rho}.$$

Okamžitým řešením této diferenciální rovnice obdržíme vztah

$$V = \pm C \ln |\rho| + D.$$

Zjištění integračních konstant provedeme použitím počátečních podmínek, které naši úlohu kompletují, a to  $V(\rho_J) = 0$  a  $V(\rho_0) = V_0$ . Můžeme tedy psát finální vztah

$$V = V_0 \ln \frac{\rho_J}{\rho}.$$

Pro tok tedy máme

$$J = V_0 \rho \ln \frac{\rho_J}{\rho}.$$

Pro kontrolu ještě uvedme, jak se tok chová u nuly, tj.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} C \rho \ln \frac{\rho_J}{\rho} = 0.$$

### 3.9 Lighthillův-Whithamův dopravní model

Snaha vysvětlit tzv. kinematické vlny.

Sestaven roku 1954, vyřešen až 1974.

Výchozí hypotéza

$$J(x, \tau) = J_e(x, \tau) - D \frac{\partial \rho(x, \tau)}{\partial x},$$

kde  $J_e$  je efektivní tok a  $D > 0$  je difuzní konstanta, celý odečítaný člen pak značí poruchu difuzního charakteru odvozenou od hustoty provozu

rychlost pak získáme jako

$$V(x, \tau) = \frac{J(x, \tau)}{\rho(x, \tau)} = V_e(x, \tau) - \frac{D}{\rho(x, \tau)} \frac{\partial \rho}{\partial x} = V_e(\rho) - \frac{D}{\rho(x, \tau)} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

dosazení do rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, \tau) \cdot V(x, \tau)) = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \cdot V_e(\rho) - D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \stackrel{!}{=} 0,$$

odkud

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot V_e(\rho) + \rho \frac{\partial V_e}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0,$$

celkem tedy máme jednu rovnici pro dvě neznámé funkce  $\rho$  a  $V_e$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \left( V_e(\rho) + \rho \frac{\partial V_e}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (3.6)$$

kde ale vzít druhou rovnici? tady - od Greenshieldse!

$$V_e(\rho) = V_0 \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_J} \right)$$

dosadíme ji tedy do (3.6) za  $V_e$ , obdržíme

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} + \left( V_0 - 2 V_0 \frac{\varrho}{\varrho_J} \right) \frac{\varrho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2},$$

kde  $V_0, \varrho_J \in \mathbf{R}^+$

zavedeme propagační rychlost kinematických vln

$$\mu(x, \tau) = V_0 \left( 1 - 2 \frac{\varrho(x, \tau)}{\varrho_J} \right),$$

odkud posléze

$$\varrho(x, \tau) = \frac{\varrho_J}{2 V_0} (V_0 - \mu(x, \tau)),$$

tedy

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} = -\frac{\varrho_J}{2 V_0} \frac{\partial \mu}{\partial \tau}$$

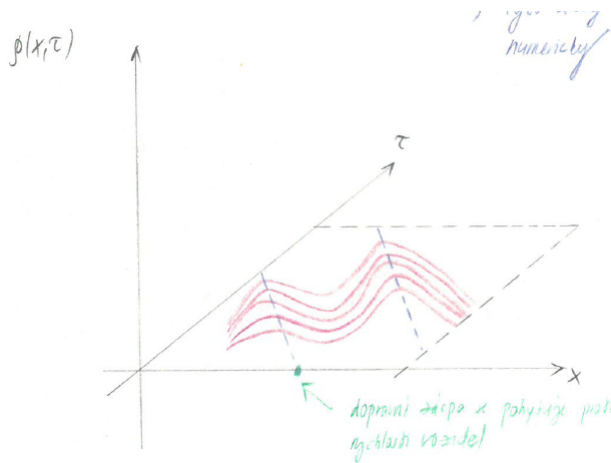
$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = -\frac{\varrho_J}{2 V_0} \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} = -\frac{\varrho_J}{2 V_0} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}$$

Burgersova rovnice řeší problém šokových dopravních vln, ale neumí vysvětlit fenomén samoorganizace dopravních stop a stop-and-go režimy, tzv. noisiness Burger equation s dodatečným flukтуаčním členem a s difúzním koeficientem závislým na hustotě provozu přináší realistické predikce chování dopravy

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \mu(x, \tau) \frac{\partial \mu}{\partial x} = D(\mu) \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \xi(x, \tau),$$

kde  $D(\mu)$  je difúzní koeficient závislý na  $\mu$  a  $\xi(x, \tau)$  je flukтуаční člen; tyto úlohy lze řešit pouze numericky



Obrázek 3.18

Dopravní zácpa se pohybuje proti směru rychlosti vozidel.

zpět k tomu co řešíme: **Pak přehodit pořadí, ať vsuvka neruší výpočet.** Po dosazení:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \mu(x, \tau) \frac{\partial \mu}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2},$$

což je nelineární Burgersova diferenciální rovnice (tzv. konsolidovaný tvar), lze ji aplikací Cole-Hopfovy transformace převést na rovnici lineární, ta transformace:

$$\mu(x, \tau) = -\frac{2D}{\varphi(x, \tau)} \frac{\partial \varphi}{\partial x'}$$

kde  $\varphi(x, \tau) \neq 0$ , na to přišel právě ten Whitham roku 1974, vyjádření parciálních derivací

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} &= \frac{2D}{\varphi^2(x, \tau)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{2D}{\varphi(x, \tau)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \tau} \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} &= \frac{2D}{\varphi^2(x, \tau)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{2D}{\varphi(x, \tau)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} &= -\frac{4D}{\varphi^3(x, \tau)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 + \frac{6D}{\varphi^2(x, \tau)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2D}{\varphi(x, \tau)} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \end{aligned}$$

Dosazení, zkrácení  $2D$  a násobení  $\varphi^3(x, \tau)$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \varphi(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0,$$

odkud s využitím znalosti faktu  $\varphi(x, \tau) \neq 0$  (přímo z definice Cole-Hopfovy transformace) můžeme psát

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{\varphi(x, \tau)} \right) = 0,$$

odtud

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = C \varphi(x, \tau),$$

kde  $C, D \in \mathbf{R}$ , což je již ona avizovaná Burgersova lineární alternativa

Zamyšlení: teoreticky by  $C$  nemuselo být číselné, ale mohlo by se jednat o funkci od  $\tau$ , jak moc by se pak zkomplikovalo řešení?

Hledáme tedy řešení

$$\widehat{L}\varphi(x, \tau) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - C \varphi(x, \tau) = 0,$$

kde  $C \in \mathbf{R}, D > 0$ .

### 3.9.1 Cauchyova úloha

počáteční podmínka  $\varphi(x, \tau)|_{\tau=0} = \beta(x) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$  jak souvisí tato počáteční podmínka s původní počáteční podmínkou stanovenou pro hustotu?

ze tvaru Cole-Hopfovy transformace plyne, že

$$\mu(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial x} [-2D \ln(\varphi(x, \tau))],$$

odkud

$$2D \ln(\varphi(x, \tau)) = - \int_0^x \mu(y, \tau) dy,$$

odkud

$$\varphi(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2D} \int_0^x \mu(y, \tau) dy},$$



tedy

$$\varphi(x, 0) = e^{-\frac{1}{2b} \int_0^x \mu(y, 0) dy}$$

zároveň ale  $\mu(x, \tau) = V_0 \left(1 - 2 \frac{\varrho(x, \tau)}{\varrho_f}\right)$ , odkud

$$\mu(x, 0) = \frac{V_0}{\varrho_f} \left[ \varrho_f - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\alpha_i(0))^2}{2\sigma^2}} \right],$$

kde  $\alpha_i(0)$  jsou počáteční lokace; označme  $\alpha_i(0) = d_i$ , pak

$$\int_0^x \mu(y, 0) dy = V_0 x - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{Erf} \left[ \frac{x-d_i}{\sqrt{2}\sigma} \right]\right) = V_0 x - n - \sum_{i=1}^n \operatorname{Erf} \left[ \frac{x-d_i}{\sqrt{2}\sigma} \right],$$

kde  $\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ , tedy

$$\varphi(x, 0) = e^{-\frac{n-V_0 x}{2b}} e^{\frac{1}{2b} \sum_{i=1}^n \operatorname{Erf} \left[ \frac{x-d_i}{\sqrt{2}\sigma} \right]} =: \beta(x)$$

### 3.9.2 Převod do $\mathcal{D}'$

$w(x, \tau) = \Theta(\tau) \varphi(x, \tau)$ , odkud

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \Theta(\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \delta(\tau) \otimes \beta(x) + \Theta(\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$$

a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \Theta(\tau) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\widehat{L}w(x, \tau) = \Theta(\tau) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - C \varphi(x, \tau) \right] + \delta(\tau) \otimes \beta(x),$$

odkud

$$\widehat{L}w(x, \tau) = \delta(\tau) \otimes \beta(x),$$

tedy zobecněná alternativa v  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C w(x, \tau) = \delta(\tau) \otimes \beta(x)$$

### 3.9.3 Fundamentální řešení

Máme rovnici

$$\frac{\partial \epsilon(x, \tau)}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 \epsilon(x, \tau)}{\partial x^2} - C \epsilon(x, \tau) = \delta(x) \otimes \delta(\tau),$$

na kterou pustíme Fourierovu transformaci  $\mathcal{F}_x$ , čímž získáme rovnici

$$\frac{\partial E(\xi, \tau)}{\partial \tau} + D \xi^2 E(\xi, \tau) - C E(\xi, \tau) = \delta(\tau),$$

kde  $E(\xi, \tau) = \mathcal{F}_x[\epsilon(x, \tau)]$ , na níž vypustíme Laplaceovu transformaci  $\mathcal{L}_\tau$ , získáme

$$p \mathbb{E}(\xi, p) + D \xi^2 \mathbb{E}(\xi, p) - C \mathbb{E}(\xi, p) = 1,$$

kde  $\mathbb{E}(\xi, p) = \mathcal{L}_\tau [E(\xi, \tau)]$ . Odtud

$$\mathbb{E}(\xi, p) = \frac{1}{p + D \xi^2 - C},$$

odlaplaceováním

$$\mathbb{E}(\xi, \tau) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{p + D \xi^2 - C} \right] = \Theta(\tau) e^{-(D \xi^2 - C)\tau}$$

a odfourierováním

$$\epsilon(x, \tau) = \mathcal{F}_x^{-1} \left[ \Theta(\tau) e^{-(D \xi^2 - C)\tau} \right] = \Theta(\tau) e^{C\tau} \mathcal{F}_x^{-1} \left[ e^{-D \xi^2 \tau} \right] = \Theta(\tau) e^{C\tau} \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_x \left[ e^{-D x^2 \tau} \right]$$

získáme již naše fundamentální řešení

$$\epsilon(x, \tau) = \frac{\Theta(\tau)}{2\pi} e^{C\tau} \sqrt{\frac{\pi}{D\tau}} e^{-\frac{x^2}{4D\tau}}.$$

### 3.9.4 Konstrukce vzorce pro obecné řešení Burgersovy rovnice

$$w(x, \tau) = \epsilon(x, \tau) \star \delta(\tau) \otimes \beta(x) = \epsilon(x, \tau) \star \beta(x),$$

tedy

$$w(x, \tau) = \frac{\Theta(\tau)}{2\sqrt{\pi D \tau}} e^{C\tau} \int_{\mathbf{R}} \beta(x - \xi) e^{-\frac{\xi^2}{4D\tau}} d\xi$$

### 3.9.5 Některá triviální řešení

**A**

případ, kdy  $\varrho(x, 0) = \text{konst}$ , a tedy i  $\mu(x, 0) = \text{konst}$ , pak Cauchyho podmínka nabývá tvaru

$$\varphi(x, 0) = e^{-\frac{1}{2D}Cx} = \beta(x)$$

a řešení je

$$\begin{aligned} \mu(x, \tau) &= -2D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \ln \left( \frac{e^{C\tau}}{2\sqrt{\pi D \tau}} \right) + \ln \left( \int_{\mathbf{R}} \beta(x - \xi) e^{-\frac{\xi^2}{4D\tau}} d\xi \right) \right] = -2D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \ln \left( \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{C}{2D}(x-\xi)} e^{-\frac{\xi^2}{4D\tau}} d\xi \right) \right] = \\ &= -2D \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{Cx}{2D} + \frac{1}{2} \ln(4D\tau x) + \frac{C^2\tau}{4D} \right] = C \end{aligned}$$

**B**

případ, kdy  $\varrho(x, 0) = Kx$ , a tedy  $\mu(x, 0) = V_0 \left( 1 - 2 \frac{Kx}{\varrho} \right) =: \alpha - Cx$ , pak Cauchyho podmínka nabývá tvaru

$$\varphi(x, 0) = e^{-\frac{1}{2D} \int_0^x (\alpha - Cy) dy} = e^{-\frac{1}{2D} (\alpha x - \frac{C}{2} x^2)} =: \beta(x)$$

a řešení je

$$\begin{aligned} \mu(x, \tau) &= -2D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \ln \left( \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{\alpha}{2D}(x-\xi)} e^{\frac{C}{4D}(x-\xi)^2} e^{-\frac{\xi^2}{4D\tau}} \right) \right] = -2D \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[ 2 e^{\frac{Cx^2 - 2x\alpha + \alpha^2\tau}{4D - 4CD\tau}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{D\tau}{1 - C\tau}} \right] = \\ &= -2D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Cx^2 - 2x\alpha + \alpha^2\tau}{4D - 4CD\tau} \right] = \frac{1}{2C\tau - 2} (2Cx - 2\alpha) = \frac{Cx - \alpha}{C\tau - 1} \end{aligned}$$

a vzhledem k tomu, že víme, že platí rovnost

$$\frac{Cx - \alpha}{C\tau - 1} = V_0 \left( 1 - 2 \frac{\rho(x, \tau)}{\rho_I} \right)$$

a zároveň  $\alpha = V_0$  a  $C = 2 V_0 \frac{K}{\rho_I}$ , můžeme vyjádřit

$$\frac{Cx - \alpha}{C\tau - 1} = \alpha - \frac{C}{K} \rho(x, \tau),$$

odkud již

$$\rho(x, \tau) = K \frac{\tau\alpha - x}{C\tau - 1}$$

kontrola:  $\rho(x, 0) = Kx$

C

případ, kdy  $\rho(x, 0) = L - Kx$ , jak pak vypadá  $\rho(x, \tau)$ ?

### 3.9.6 Transformace modelu pro více realistické predikce

v roce 1979 Prigogine a Phillips

cíl: donutit model aby generoval kongesce spontánně

ústupek: odklon od analytického řešení k numerickému

noisy Burgers equation:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \mu(x, \tau) \frac{\partial \mu}{\partial x} = D(\mu) \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \xi(x, \tau),$$

kde  $\xi(x, \tau)$  je flukтуаční člen postihující stochastičnost

rce pro rychlost:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + V(x, \tau) \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho(x, \tau)} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{V_e(\rho) - V(x, \tau)}{\tau(\rho)},$$

kde  $\tau(\rho)$  je relaxační čas (závislý na hustotě),  $P(x, \tau)$  je dopravní tlak, pro který platí  $P(x, \tau) = \rho(x, \tau) \Theta(x, \tau)$ ,

kde  $\Theta(x, \tau)$  je rozptyl rychlosti vzorku vozidel - lze buď odvodit aproximativní dynamickou rovnici, nebo předpokládat vztah

$$\Theta(x, \tau) = \Theta_0 \left( 1 - \frac{\rho(x, \tau)}{\rho_I} \right),$$

kde tedy  $\Theta(x, \tau) \geq 0$  a rozptyl rychlostí se s rostoucí hustotou zmenšuje

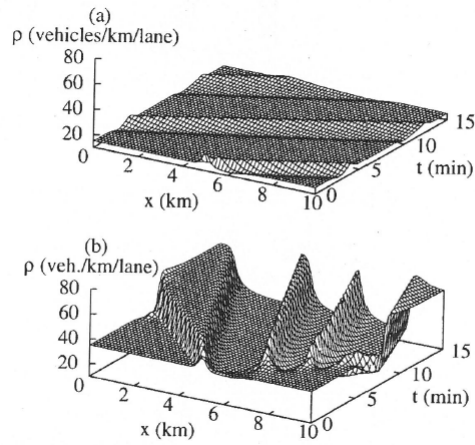
## 3.10 O propagační rychlosti kinematických vln, jejich rozbor

$$\mu(x, \tau) = V_0 \left( 1 - 2 \frac{\rho(x, \tau)}{\rho_I} \right),$$

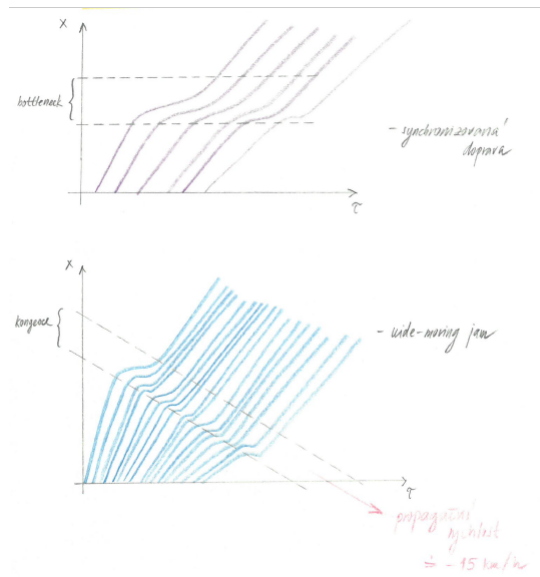
kde  $V_0 > 0$  a  $\rho_I > 0$

Greenshields: maximální tok nastává pro hustotu  $\rho_0 = \frac{1}{2} \rho_I$ , tedy ale  $\mu(x, \tau) = 0$

$\Rightarrow$  pro hustoty  $\rho \in \left( 0, \frac{\rho_I}{2} \right)$  je rychlost vln pozitivní, ale pro  $\rho \in \left( \frac{\rho_I}{2}, \rho_I \right)$  se vlny v systému šíří se zápornou rychlostí, tedy dopravní zácpa se posouvá proti směru rychlosti vozidel



**Obrázek 3.19**  
Ilustrace ke kinematickým vlnám



**Obrázek 3.20**  
Ilustrace ke kinematickým vlnám - rozbor

## Kapitola 4

# Mikroskopická struktura dopravy a její statistické charakteristiky

### 4.1 Typický set dopravních dat

$\ell \in \{0, 1, 2\}$

$$T_{\ell}^{(in)} = \{\tau_{k\ell}^{(in)} \in \mathbf{R}_0^+ : k = 1, 2, \dots, N\},$$

$$T_{\ell}^{(out)} = \{\tau_{k\ell}^{(out)} \in \mathbf{R}_0^+ : k = 1, 2, \dots, N\},$$

$$V_{\ell} = \{v_{k\ell} \in \mathbf{R}_0^+ : k = 1, 2, \dots, N\},$$

$$D_{\ell} = \{d_{k\ell} \in \mathbf{R}^+ : k = 1, 2, \dots, N\},$$

kde  $k$  značí pořadí vozidla a  $\ell$  indexování pruhů ( $\ell = 0$  pomalý pruh,  $\ell = 1$  main lane,  $\ell = 2$  pruh pro předjíždění)

$\tau_{k\ell}^{(in)}$  je čas, kdy vozidlo protnulo linii detektoru

$\tau_{k\ell}^{(out)}$  je čas, kdy vozidlo opustilo linii detektoru

$v_{k\ell}$  je rychlost  $k$ -tého vozidla v  $\ell$ -tém pruhu zaznamenaná detektorem

$d_{k\ell}$  je délka  $k$ -tého vozidla v  $\ell$ -tém pruhu

tyto veličiny reprezentují tzv. primární mikroskopické veličiny, neboť jsou měřeny přímo

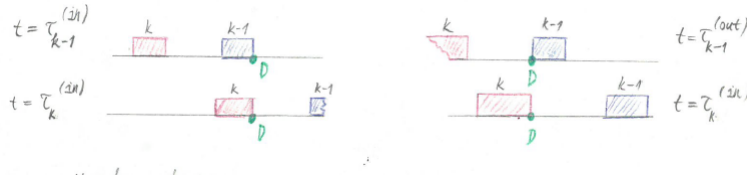
teď se mrkneme na sekundární mikroskopické veličiny, které jsou tedy získané nepřímo - nejsou běžnou součástí záznamů z dopravních detektorů

**délkové odstupy** - headways (odstupy, brutto vzdálenosti, rozestupy) a clearances (světlosti, netto vzdálenosti, mezery) - prostorová vlastnost



Obrázek 4.21  
Ilustrace k délkovým odstupům

časové odstupy - headways (brutto intervaly) a clearances (světlosti, netto rozestupy) - časová vlastnost



Obrázek 4.22  
Ilustrace k časovým odstupům

**hrubý časový odstup:**  $z_{k\ell} = \tau_{k\ell}^{(in)} - \tau_{(k-1)\ell'}^{(in)}$ , **čistý časový odstup:**  $t_{k\ell} = \tau_{k\ell}^{(in)} - \tau_{(k-1)\ell}^{(out)}$  - ačkoliv se jedná o sekundární mikropopis, veličiny  $z_{k\ell}$  a  $t_{k\ell}$  nejsou zatíženy žádnou systematickou chybou (jsou vypočteny z primárních veličiny)

délkové headways a světlosti jsou naopak zatíženy výpočetní chybou, neboť se počítají dle schématu

$$s_{k\ell} = v_{k\ell} z_{k\ell} \quad \text{a} \quad r_{k\ell} = v_{k\ell} t_{k\ell}$$

- tento vzorec předpokládá konstantní rychlost během časových intervalů  $\tau \in \langle \tau_{(k-1)\ell'}^{(in)}; \tau_{k\ell}^{(in)} \rangle$ , resp.  $\tau \in \langle \tau_{(k-1)\ell'}^{(out)}; \tau_{k\ell}^{(in)} \rangle$
- konstantnost  $v(\tau) = v_{k\ell}$  je ale diskutabilní zejména v oblasti malých hustot, kde jsou časové rozestupy příliš velké
- tedy  $s_{k\ell}$  a  $v_{k\ell}$  jsou zatíženy systematickou chybou

další mikroskopické veličiny: **individuální obsazenost detektoru:**  $o_{k\ell} = \tau_{k\ell}^{(out)} - \tau_{k\ell}^{(in)}$

**relativní individuální obsazenost detektoru:**  $\tilde{o}_{k\ell} = \frac{o_{k\ell}}{\tau_{N\ell}^{(out)} - \tau_{1\ell}^{(in)}}$

**průměrná obsazenost detektoru:**  $O_\ell = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N o_{k\ell}$  - je to třetí makroskopická veličiny, která je chápána (po toku a hustotě) jako fundamentální ( $\ell \in \{0, 1, 2\}$ )

## 4.2 Empirické hodnoty toku, hustoty a průměrné rychlosti vzorku

Jsou určovány z mikroskopických dat. Označme  $m$  velikost vzorkování (sampling size), celkový počet vzorků  $M_\ell = \lfloor \frac{N_\ell}{m} \rfloor$ , kde  $N_\ell = \text{card} \{ \tau_{k\ell}^{(in)} : \ell \text{ fixováno} \}$ .

Datové vzorky (typická verze):

$$S_j^{(\ell)} = \{ (\tau_{k\ell}^{(in)}; \tau_{k\ell}^{(out)}; v_{k\ell}; d_{k\ell}) \in T_\ell^{(in)} \times T_\ell^{(out)} \times V_\ell \times D_\ell \}$$

Lokální tok (lokální fluxe):

$$f_j^{(\ell)} = \frac{m}{\tau_{jm,\ell}^{(out)} - \tau_{(j-1)m+1,\ell}}$$

Lokální průměrná rychlost:

$$\bar{v}_j^{(\ell)} = \frac{1}{n} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} v_{k\ell}$$

případně harmonický průměr

$$\left[\bar{v}_j^{(\ell)}\right]^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} \frac{1}{v_{k\ell}}$$

Lokální hustota (bývá odhadována pomocí rovnice proudění kapalin):

$$\rho_j^{(\ell)} := \frac{J_j^{(\ell)}}{\bar{v}_j^{(\ell)}}$$

občas se doporučuje užít harmonický průměr u rychlosti; nekorektnost této definice spočívá v mísení časového a prostorového průměrování

**Průměrné (vzorkově-průměrné) hodnoty mikroskopických veličin:**

- Time-clearance

$$\bar{t}_j^{(\ell)} = \frac{1}{m} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} t_{k\ell}$$

- Time-headway

$$\bar{z}_j^{(\ell)} = \frac{1}{m} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} z_{k\ell}$$

- Distance-clearance

$$\bar{s}_j^{(\ell)} = \frac{1}{m} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} s_{k\ell}$$

- Distance-headway

$$\bar{r}_j^{(\ell)} = \frac{1}{m} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} r_{k\ell}$$

**Škálované verze mikroveličin:**

- Scaled time-clearance

$$u_{k\ell} = \frac{t_{k\ell}}{\bar{t}_j^{(\ell)}}$$

pro  $k \in \{(j-1)m+1, (j-1)m+2, \dots, jm\}$

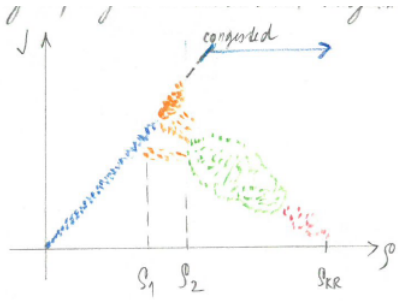
- Scaled distance-clearance

$$x_{k\ell} = \frac{s_{k\ell}}{\bar{s}_j^{(\ell)}}$$

pro  $k \in \{(j-1)m+1, (j-1)m+2, \dots, jm\}$

Tato procedura je speciálním případem tzv. unfoldingu - cílem procedury je nalézt uiverzální znaky těchto veličin a eliminovat naopak globální trendy.

Grafickou analýzou závislosti lokální fluxe na lokální hustotě pak vznikají známé tvary empirických fundamentálních diagramů.



**Obrázek 4.23**

Ilustrace závislosti lokální fluxe na lokální hustotě

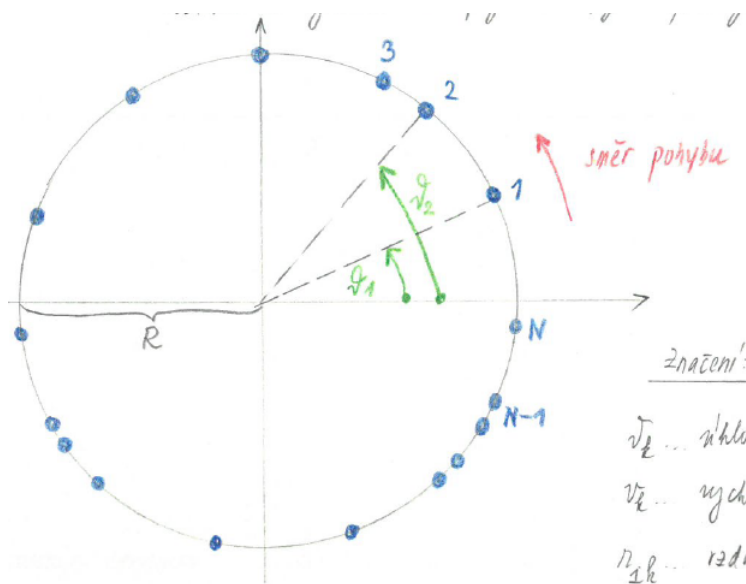
Poznámka: V reálné dopravě jsou všechny mikroskopické veličiny stochastické povahy. Asociované hustoty pravděpodobnosti pak závisejí na aktuálním stavu (tj. makroskopických hodnotách) dopravního proudu.



## Kapitola 5

# Mikroskopické modelování - termodynamický přístup

- Jednosměrné jednoznačné dopravní proudění.
- Přímková versus kruhová varianta.
- Předjíždění není povoleno.
- Vozidla do systému nevstupují ani jej neopouštějí, tj.  $\rho = \text{konst.}$



Obrázek 5.24  
Ilustrace k termodynamickému modelu

### Značení:

- $\vartheta_k$  ... úhlová poloha  $k$ -té částice
- $v_k$  ... rychlost  $k$ -tého vozidla
- $r_{ik}$  ... vzdálenost vozidel  $i$  a  $k$
- $w_k$  ... optimální rychlost  $k$ -tého vozidla

### Platí:

$r_{ik} = R \arccos(\cos(\vartheta_i - \vartheta_k))$ , kde  $R$  značí poloměr kruhu

**Jak vozidla interagují?**

- $r_{ik}$  velké  $\rightarrow$  zanedbatelná interakce
- $r_{ik}$  malé  $\rightarrow$  výrazné odpuzování
- $r_{k,k+1} \dots$  nejvýrazněji ovlivňuje silová působení na  $k$ -té vozidlo
- Síly mezi vozidly jsou ale principiálně neměřitelné - lze je jen odhadovat na základě empirických statistik mikroveličín

**Obecný rys odpudivých sil:**

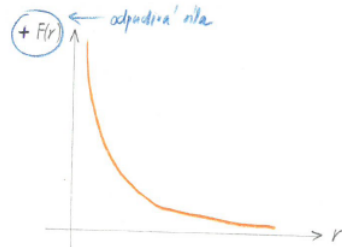
- $\lim_{r \rightarrow 0^+} F(r) = +\infty$ , tj. nemožnost předjíždět
- $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0$ , tj. interakce na velké vzdálenosti vymizí - to ale může také znamenat, že  $\text{supp}(F)$  je omezená množina, tj.  $\exists K > 0$  tak, že pro  $r > K$  je  $F(r) = 0$

$\rightarrow$  Nabízí se tedy matematický popis

$$F(r) = \frac{1}{r^\gamma},$$

kde  $\gamma \in (0, +\infty)$

Které  $\gamma$  ale nejvíc odpovídá realitě? Jakou metodu k tomu nalézt?



**Obrázek 5.25**  
Obecný rys odpudivých sil

Interakční potenciály:

$\vec{F} = -\text{grad}\varphi$ , odkud  $F(r) = -\frac{d\varphi}{dr}$ , tedy

$$\varphi(r) = - \int_0^r F(s) ds + C$$

$\varphi(r)$	$\gamma$	Název potenciálu
$-\ln(r)$	1	logaritmický
$\frac{1}{\gamma-1}r^{1-\gamma}$	(0, 1)	mocninný
$\frac{1}{r}$	2	vyvážený hyperbolický
$\frac{1}{\gamma-1}r^{\gamma-1}$	(1, 2)	slabý hyperbolický
$\frac{1}{\gamma-1}r^{\gamma-1}$	$> 2$	zesílený hyperbolický

Dvoutělesový potenciál:  $\varphi_{ki} = \varphi_{ki}(r_{ki})$

**Dosahovost potenciálu:**

1. **Dlouhodobost:** interakce všech vozidel, indexová množina  $I_k = \hat{N} - \{k\}$
2. **Krátkodobost:** interakce nejbližších vozidel, indexová množina  $I_k = \{k - 1, k + 1\}$
3. **Lokální dosahovost:**  $k$ -té vozidlo interaguje pouze s vozidly ve svém okolí  $U_\epsilon(k)$ , indexová množina  $I_k = \{i \in \hat{N} : i \in U_\epsilon^*(k)\}$  (souvislost s definicí okolí)
4. **Střední dosahovost:** interakce více sousedů, ale ne všech vozidel, indexová množina  $I_k = \{k - m, k + m : m \in \hat{s}\}$ , kde pro index dosahu  $s \in \mathbf{N}$  platí  $1 < s < N$

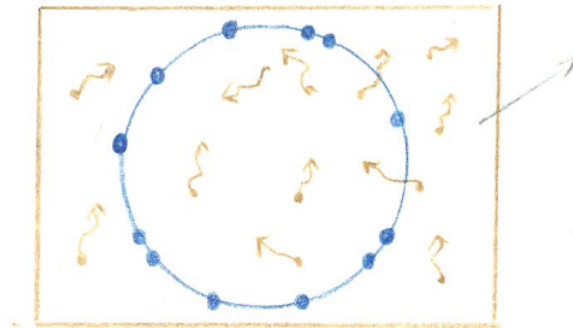
Celková potenciální energie souboru  $N$  částic:

$$U = \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi_{ki}(r_k i),$$

nejčastěji

$$U = \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi(r_k i)$$

## 5.1 Stochastická alternativa modelu



Obrázek 5.26  
Teplotní rezervoár

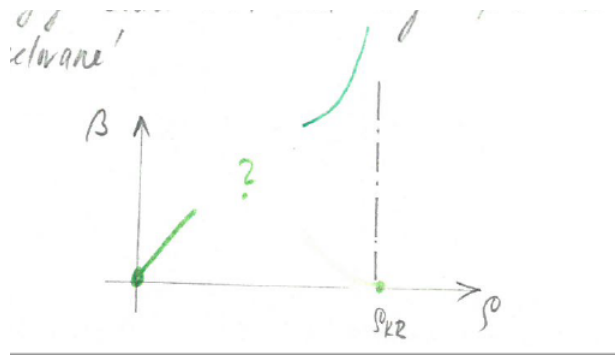
Teplotní rezervoár zajišťuje přechod od deterministického ke stochastickému modelu; je charakterizován termodynamickou teplotou  $T \geq 0$ .

$\beta = \frac{1}{kT}$  je inverzní termodynamická teplota, tzv. (stochastická) rezistivita

- Čím je  $T$  větší, tím má rezervoár větší energii a tím více ovlivňuje uspořádání částic na kruhu.
- Pro  $T \rightarrow +\infty$  je velká pravděpodobnost výskytu vozidel poblíž sebe.
- Pro  $T = 0$  rezervoár nemá vliv - vozidla se ustálí v ekvidistantních lokacích.

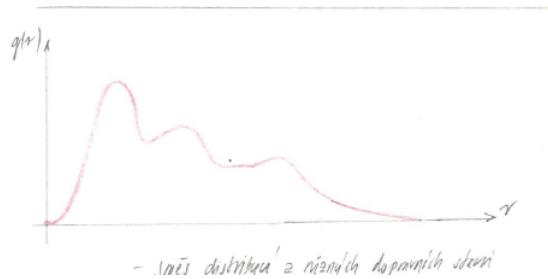
**Interpretace inverzní teploty  $\beta$ :** psychické vypětí řidiče

- $\beta = 0$ : nulové vypětí řidič (při nízkých hustotách), naplno se projeví stochastické rysy dopravy, vozidla se pohybují nezávisle, Poissonovské výskyty vozidel v intervalu délky  $L$ , resp.  $T$
- $\beta \rightarrow +\infty$ : maximální vypětí řidiče (při kritických hustotách), stochastické rysy dopravy jsou potlačeny, vozidla se pohybují jako extrémně závislá, výskyty vozidel v intervalu délky  $L$  jsou silně korelované



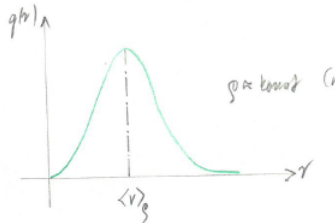
**Obrázek 5.27**  
Odhad chování funkce  $\beta = \beta(\rho)$

**Stochastické závislosti individuálních mikroveličin na makroskopických hodnotách:**



**Obrázek 5.28**  
Před unfoldingem

Směs distribucí z různých dopravních stavů, nutno provést proceduru unfoldingu, tj. rozřazení do různých hustotních pásem. Pak viz následující obrázek ( $\rho = \text{konst}$ , např. 40 – 50 veh km<sup>-1</sup>).



**Obrázek 5.29**  
Po unfoldingu

**Celková energie deterministického souboru částic:**

$$H = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (v_k - w_k)^2 + \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi_k(r_{ik}) =: H(\vec{v}, \vec{\vartheta}),$$

kde  $m_k$  značí hmotnost vozidel,  $v_k$  individuální rychlost,  $w_k$  optimální rychlost a  $\vartheta_k$  úhlové polohy zjednodušení:

$$H(\vec{v}, \vec{\vartheta}) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (v_k - w)^2 + c \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi(r_{ik})$$

## 5.2 Stochastický popis termodynamické alternativy souboru

jak vypadá hustota pravděpodobnosti pro výskyt systému ve fázovém elementu  $(v_1 + dv_1) \times (v_2 + dv_2) \times \dots \times (v_N + dv_N) \times (r_1 + dr_1) \times (r_2 + dr_2) \times \dots \times (r_N + dr_N)$ :

$$p(\vec{v}, \vec{r}) = \frac{1}{\tilde{Z}_N} e^{-\frac{H}{kT}} = \frac{1}{\tilde{Z}_N} e^{-\beta H(\vec{v}, \vec{r})} \Theta(\vec{r}),$$

kde  $\tilde{Z}_N = \tilde{Z}_N(L)$  značí partiční sumu,  $L$  délku kružnice,  $R$  poloměr kružnice, tj.  $R = \frac{L}{2\pi}$  a  $r_{ik} = \frac{L}{2\pi} \arccos(\cos(\vartheta_i - \vartheta_k))$

$$\tilde{Z}_N = \int_{\mathbf{R}^{2N}} e^{-\beta H(\vec{v}, \vec{r})} d\vec{r} d\vec{v},$$

neboť

$$\int_{\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N} p(\vec{v}, \vec{r}) d\vec{r} d\vec{v} = 1$$

kruhová varianta plynu:

$$p(\vec{v}, \vec{r}) = \frac{1}{\tilde{Z}_N(L)} e^{-\beta H(\vec{v}, \vec{r})} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \Theta(\vec{r})$$

- přechod do  $\mathcal{D}'$  nebo  $\mathcal{H}'$
- $\mathcal{H}'$  jsou lim a spojitě funkcionály nad hustotami prsti

$$p(\vec{v}, \vec{r}) = \frac{1}{\tilde{Z}_N(L)} e^{-\beta \frac{m}{2} \sum_{k=1}^N (v_k - w)^2 - \beta c \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi(r_{ik})} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \Theta(\vec{r})$$

## 5.3 Odvození hustoty pravděpodobnosti pro rychlost $k$ -tého vozidla

$$q(v_k) = \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \int_{\mathbf{R}^N} \Theta(\vec{r}) p(\vec{v}, \vec{r}) dv_1 \dots dv_{k-1} dv_{k+1} \dots dv_N d\vec{r} = A e^{-\beta \frac{m}{2} (v_k - w)^2}$$

nezávislost na indexu vozidla:

$$q(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(v-w)^2}{2\sigma^2}},$$

kde  $\mathbb{E}(v) = w$  a  $\text{Var}(v) = \sigma^2$ , kde  $\sigma = \sigma(\rho)$



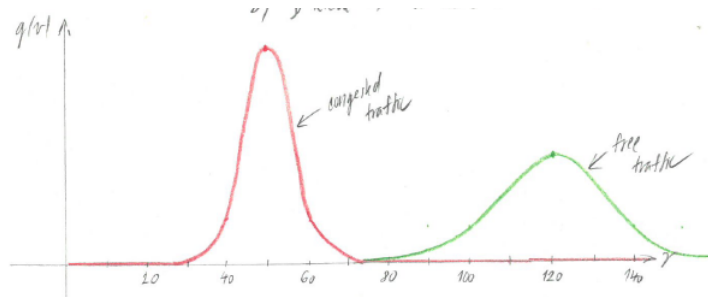
**Obrázek 5.30**  
Hustota pravděpodobnosti pro rychlost vozidla

Co se děje s rozptylem rychlosti při změně hustoty provozu?

1.  $\rho$  roste  $\rightarrow w$  klesá a  $\sigma^2$  klesá
2.  $\rho$  klesá  $\rightarrow w$  roste a  $\sigma^2$  roste

Což odpovídá:

1.  $\rho \rightarrow +\infty \rightarrow \beta \rightarrow +\infty \rightarrow \sigma \rightarrow 0_+$
2.  $\rho \rightarrow 0_+ \rightarrow \beta \rightarrow 0_+ \rightarrow \sigma \rightarrow +\infty$



**Obrázek 5.31**  
Změna rozptylu při změně hustoty provozu

Limitní případ:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} (q(v), \varphi(v)) &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (q(v), \varphi(v)) = \lim_{\sigma \rightarrow 0_+} (q(v), \varphi(v)) = \lim_{\sigma \rightarrow 0_+} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(v-w)^2}{2\sigma^2}}, \varphi(v) \right) \stackrel{\mathcal{D}'_{\text{reg}}}{=} \\ &\stackrel{\mathcal{D}'_{\text{reg}}}{=} \lim_{\sigma \rightarrow 0_+} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(v-w)^2}{2\sigma^2}} \varphi(v) dv = \left| \begin{array}{l} \varphi(v) \text{ hustota pravděpodobnosti} \\ \varphi(v) \in \mathcal{H} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} v = w + \sigma z \\ dv = \sigma dz \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0_+} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \varphi(w + \sigma z) dz = \left| \begin{array}{l} \text{záměna:} \\ \left| e^{-\frac{z^2}{2}} \varphi(w + \sigma z) \right| \leq e^{-\frac{z^2}{2}} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}) \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(w) \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(w) \sqrt{2\pi} = \varphi(w) = (\delta_w, \varphi(v)), \end{aligned}$$

tedy

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} q(v) \stackrel{\mathcal{H}}{=} \delta_w = \delta(v - w)$$

## 5.4 Odvození headway distribuce

$$\chi(\vec{r}) = \frac{1}{Z_N(L)} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) e^{-\beta c \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi(r_{ik})} \Theta(\vec{r})$$

Označme  $r_{k,k+1} =: r_k$

Pro krátkodosahovou variantu volíme:

$$\chi(\vec{r}) = \frac{1}{Z_N(L)} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) e^{-\beta \sum_{k=1}^N \varphi(r_{k,k+1})} \Theta(\vec{r}) = \left| \begin{array}{c} c = 1 \\ I_k = \{k+1\} \end{array} \right| = \frac{1}{Z_N(L)} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \prod_{k=1}^N e^{-\beta \varphi(r_k)} \Theta(\vec{r})$$

Volíme logaritmický potenciál, tj.  $\varphi(r) = -\ln(r)$ , proto:

$$p(\vec{r}) = \frac{1}{Z_N(L)} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \prod_{k=1}^N r_k^\beta \Theta(\vec{r}),$$

odkud

$$Z_N(L) = \int_{\mathbf{R}^N} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \prod_{k=1}^N r_k^\beta d\vec{r}$$

můžeme tedy psát

$$p(\vec{r}) = \frac{Z_{N-1}(L-r)}{Z_N(L)} r^\beta$$

**Dopsat z poznámek: odvození pro případ, kdy je  $\beta = 0$  a volba  $\varphi(r)$  je tedy irelevantní - vyjde  $p(r) = \Theta(r) e^{-r}$**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Z_N(L)](p) &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbf{R}^N} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \prod_{k=1}^N r_k^\beta e^{-pL} d\vec{r} dL = |\mathcal{L}[\delta(x-\mu)](p) = e^{\mu p}| = \int_{\mathbf{R}^N} \prod_{k=1}^N r_k^\beta e^{-p \sum_{k=1}^N r_k} d\vec{r} = \\ &= \left( \int_{\mathbf{R}} r^\beta e^{-pr} \right)^N = (\mathcal{L}[r^\beta])^N = \left( \frac{\Gamma(\beta+1)}{p^{\beta+1}} \right)^N = \frac{\Gamma^N(\beta+1)}{p^{N\beta+N}}, \end{aligned}$$

odkud již získáváme

$$Z_N(L) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\Gamma^N(\beta+1)}{p^{N\beta+N}} \frac{\Gamma(N\beta+N)}{\Gamma(N\beta+N)} \right] = \frac{\Gamma^N(\beta+1)}{\Gamma(N\beta+N)} L^{N\beta+N-1}$$

nyní již můžeme dosadit do vztahu pro hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} p(r) &= \frac{Z_{N-1}(L-r)}{Z_N(L)} r^\beta = \frac{\Gamma^{N-1}(\beta+1)}{\Gamma(N\beta-\beta+N-1)} \frac{\Gamma(N\beta+N)}{\Gamma^N(\beta+1)} \frac{(L-r)^{N\beta-\beta+N-2}}{L^{N\beta+N-1}} r^\beta = \\ &= \frac{r^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \frac{\Gamma(N\beta+N)}{\Gamma(N\beta-\beta+N-1)} L^{-\beta-1} \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{N\beta-\beta+N-2} = \\ &= \frac{r^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \frac{(N\beta+N-1)(n\beta+n-2)\dots(N\beta+N-\beta-1)}{L^{\beta+1}} \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{-\beta-2} \left(1 - \frac{r}{L}\right)^{N(\beta+1)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{pro větší názornost:} \\ \beta \in \mathbf{N} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \\ L = N \end{array} \right| = \left| \text{čitatel největšího zlomku má } (\beta+1) \text{ sčítanců} \right| = \end{aligned}$$

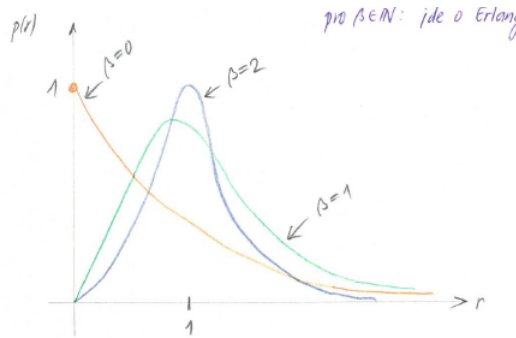
$$= \frac{r^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \left(\beta+1 - \frac{1}{N}\right) \left(\beta+1 - \frac{2}{N}\right) \dots \left(\beta+1 - \frac{\beta+1}{N}\right) \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{-\beta-2} \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{N(\beta+1)} =: p(r|N)$$

$$p(r) = \lim_{N \rightarrow +\infty} p(r|N) = \frac{r^\beta}{\Gamma(\beta+1)} (\beta+1)^{\beta+1} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{N(\beta+1)},$$

odkud

$$p(r) = \Theta(r) \frac{(\beta+1)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} r^\beta e^{-(\beta+1)r},$$

což je Gamma distribuce - pro  $\beta \in \mathbf{N}$  jde o Erlangovu distribuci



Obrázek 5.32  
Headway distribuce

$$\mathbb{E}(R) = 1, \text{Var}(R) = \frac{1}{\beta+1} \text{ odkud vidíme, že pokud } \beta \rightarrow +\infty, \text{ pak } \text{Var}(R) \rightarrow 0_+$$

**Věta 1.** Necht  $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  je hustota pravděpodobnosti a  $\text{Dom}(f) = \mathbf{R}$ . Necht  $\mathbb{E}(X) = \mu$  a existuje  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ . Necht  $g(x|\alpha)$  je jednoparametrická třída hustot prsti odvozených z  $f(x)$  na základě požadavků

1.  $\forall \alpha > 0 \mathbb{E}(X_\alpha) = \mu,$
2.  $\forall \alpha > 0 \text{Var}(X_\alpha) = \alpha^2 \sigma^2.$

Pak

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0_+} g(x|\alpha) \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \delta(x - \mu).$$

*Důkaz.* Jak z  $f(x)$  odvodit  $g(x|\alpha)$  vyhovující požadavkům? Víme, že má-li  $X$  hustotu pravděpodobnosti  $g_X(x)$ , pak hustota pravděpodobnosti pro veličinu  $Y = aX + b$ , kde  $a \neq 0$ , je

$$g_Y(y) = \frac{1}{|a|} g_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Navíc pak platí  $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$  a  $\text{Var}(Y) = a^2 \text{Var}(X)$ . Kalibrujeme tedy  $a$  a  $b$  tak, aby  $\mathbb{E}(X_\alpha) = \mu$  a  $\text{Var}(X_\alpha) = \alpha^2 \sigma^2$ , z rovnic  $\mu = a\mu + b$  a  $\alpha^2 \sigma^2 = a^2 \sigma^2$  jako  $a := \alpha$  a  $b := \mu - \alpha\mu$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0_+} (g(x|\alpha); \varphi(x)) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0_+} \int_{\mathbf{R}} g(x|\alpha) \varphi(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0_+} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{x - \mu(1-\alpha)}{\alpha}\right) \varphi(x) dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} y = \frac{x - \mu(1-\alpha)}{\alpha} \\ dy = \frac{1}{\alpha} dx \end{array} \right| = \lim_{\alpha \rightarrow 0_+} \int_{\mathbf{R}} f(y) \varphi(y\alpha + \mu - \alpha\mu) dy = \left| \text{záměna OK} \right| = \\ &= \varphi(\mu) \int_{\mathbf{R}} f(y) dy = \varphi(\mu) = (\delta_\mu; \varphi(x)) \end{aligned}$$



pro  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ , tedy

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0_+} g(x|\alpha) \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \delta(x - \mu)$$

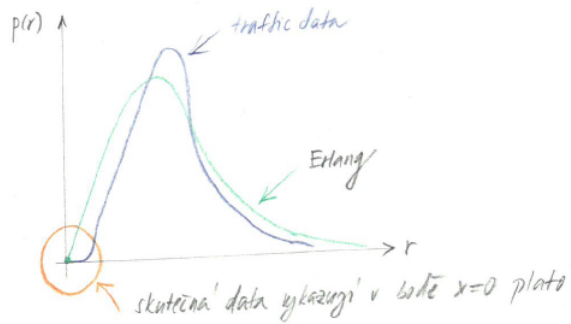
□

V našem případě jsou splněny předpoklady této věty, takže můžeme psát

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} p(r|\beta) \stackrel{\mathcal{H}'}{=} \delta(r - 1).$$

## 5.5 Dopravní data

Skutečná data vykazují v bodě  $x = 0$  plató.



**Obrázek 5.33**

Porovnání Erlangova rozdělení a dopravních dat

Co je plató?

Řekneme, že funkce  $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  má v bodě 0 levé, resp. pravé plató, pokud pro  $\forall m \in \mathbf{N}_0$  platí

$$\lim_{x \rightarrow 0_+/0_-} x^m f(x) = 0.$$

Z toho tedy plyne, že  $f(x)$  není analytická v bodě  $x = 0$  a nemá Maclaurinovu řadu.

## 5.6 Headway-distribuce pro obecný krátkodosahový plyn

$$p(\vec{r}) = \frac{1}{Z_N(L)} \delta\left(L - \sum_{i=1}^N r_k\right) \prod_{k=1}^N e^{-\beta \varphi(r_k)} \Theta(\vec{r})$$

odkud máme partiční sumu

$$Z_N(L) = \int_{\mathbf{R}^N} \delta\left(L - \sum_{i=1}^N r_k\right) \prod_{k=1}^N e^{-\beta \varphi(r_k)} \Theta(\vec{r}) d\vec{r}$$

označíme

$$f(r_k) = \Theta(r_k) e^{-\beta \varphi(r_k)}$$

tedy píšeme

$$p(r) = \frac{Z_{N-1}(L-r)}{Z_N(L)} f(r)$$

aplikujme nyní Laplaceovu transformaci na  $Z_N(L)$ :

$$\begin{aligned}
 g_N(p) &= \mathcal{L}[Z_N(L)](p) = \int_{\mathbf{R}} Z_N(L) e^{-pL} dL = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^N} \Theta(\vec{r}) \delta\left(L - \sum_{i=1}^N r_k\right) \prod_{k=1}^N e^{-\beta \varphi(r_k)} e^{-pL} d\vec{r} dL = \\
 &= \int_{\mathbf{R}^N} \prod_{k=1}^N f(r_k) \int_{\mathbf{R}} \Theta(\vec{r}) \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) e^{-pL} dL d\vec{r} = \int_{\mathbf{R}^N} \prod_{k=1}^N f(r_k) \mathcal{L}\left[\delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right)\right](p) d\vec{r} = \\
 &= \left| \mathcal{L}[\delta(x - \mu)](p) = e^{-\mu p} \right| = \int_{\mathbf{R}^N} \prod_{k=1}^N f(r_k) e^{-p \sum_{k=1}^N r_k} d\vec{r} = \int_{\mathbf{R}^N} \prod_{k=1}^N f(r_k) e^{-pr_k} d\vec{r} = \\
 &= \left( \int_{\mathbf{R}} f(r) e^{-pr} dr \right)^N =: g^N(p),
 \end{aligned}$$

tj.

$$g_N(p) = \mathcal{L}[Z_N(L)](p) = (g(p))^N = (\mathcal{L}[f(r)](p))^N,$$

odkud

$$Z_N(L) = \mathcal{L}^{-1}[g(p)](L)$$

inverzní Laplaceovu transformaci ovšem známe:  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p) \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$ , kde integrál nezávisí na volbě  $\gamma \in \mathbf{R}$ , ani  $\gamma \in \mathbf{C}$

### 5.6.1 Aproximace v sedlovém bodě

z inverzní Laplaceovy transformace zjišťujeme

$$Z_N(L) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} [g(p)]^N e^{pL} dp$$

označíme-li  $p_0$  jako sedlový (stacionární) bod, víme také

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}-i\infty}^{\mathbf{C}+i\infty} F(p) e^{pt} dp \approx \frac{F(p_0) e^{tp}}{\sqrt{2\pi |H''(p)|}},$$

kde  $F(p) = e^{H(p)}$

nyní vyšetříme sedlový bod integrandu:

$$\frac{d}{dp} [g^N(p) e^{pL}] = N g^{N-1}(p) \frac{dg}{dp} e^{pL} + g^N(p) L e^{pL} \stackrel{!}{=} 0$$

$$N \frac{dg}{dp}(D) + L g(D), \stackrel{!}{=} 0,$$

odkud získáme rovnici

$$\frac{1}{g(D)} \frac{dg}{dp}(D) = -\frac{L}{N},$$

která v sobě zahrnuje tvar potenciálu  $\varphi(r)$ , neboť

$$g(p) = \mathcal{L}[f(r)](p) = \mathcal{L}[\Theta(r) e^{-\beta \varphi(r)}](p),$$

tedy  $D$  se mění s tvarem potenciálu, navíc při nejčastější volbě  $L = N$  nezávisí  $D$  ani na  $N$ , ani na  $L$

$$\frac{1}{g(D)} \frac{dg}{dp}(D) = -1$$

Vzhledem k tomu, že víme

$$p(r|N) = \frac{Z_{N-1}(L-r)}{Z_N(L)} f(r),$$

píšeme dle výše uvedeného

$$Z_N(L) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} g^N(p) e^{pL} dp \approx \frac{g^N(D) e^{DL}}{\sqrt{2\pi |H''(D)|}}$$

a vzhledem k tomu, že

$$H(p) = \ln g^N(p) = N \ln g(p)$$

a

$$(\ln g)'' = \left( \frac{g'}{g} \right)' = \frac{g'' g - (g')^2}{g^2},$$

máme

$$Z_N(L) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \frac{|g(D)|^2}{\sqrt{|g''(D)g(D) - (g'(D))^2|}} g^N(D) e^{DL} = c \frac{g^N(D) e^{DL}}{\sqrt{N}}.$$

Tato konstanta nezávisí ani na  $N$ , ani na  $L$ , pokud  $N = L$ , závisí tedy pouze na tvaru potenciálu. Pro  $N = L$  uzavíráme

$$Z_N(L) = c \frac{g^N(D) e^{DN}}{\sqrt{N}}.$$

Upravujme nyní onu hustotu pravděpodobnosti

$$p(r|N) = \frac{g^{N-1}(D) e^{D(N-1)}}{\sqrt{N-1}} \frac{c}{c} \frac{\sqrt{N} f(r)}{g^N(D) e^{DN}} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \frac{e^{-Dr}}{g(D)} f(r),$$

odkud

$$p(r) = \lim_{N \rightarrow +\infty} p(r|N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \frac{e^{-Dr}}{g(D)} f(r) = A \Theta(r) e^{-\beta \varphi(r)} e^{-Dr}.$$

Z rovnice pro sedlový bod pak plyne, že  $\mathbb{E}(R) = 1$ .

Limitní případy:

$\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = 0$ , odkud  $\lim_{r \rightarrow +\infty} p(r) = 0$

$\lim_{r \rightarrow 0+} \varphi(r) = -\infty$ , odkud  $\lim_{r \rightarrow 0+} p(r) = \begin{cases} 0 & \beta > 0 \\ A & \beta = 0 \end{cases}$

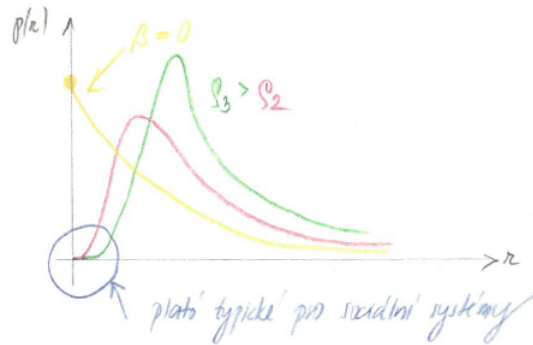
Co znamená  $\beta = 0$ ?

- žádná interakce mezi řidiči
- volná doprava
- vlastně nezáleží na tvaru  $\varphi(r)$
- pro všechny typy potenciálů platí:

$$p(r) = \Theta(r) e^{-Dr}$$

Volba hyperbolického potenciálu  $\varphi(r) = -\frac{1}{r}$ :

$$p(r) = \Theta(r) A e^{-\frac{\beta}{r}} e^{-Dr}$$



Obrázek 5.34

Hyperbolický potenciál a plató typické pro sociální systémy

$$D(\beta) \approx \beta + \frac{3 - e^{-\sqrt{\beta}}}{2}$$

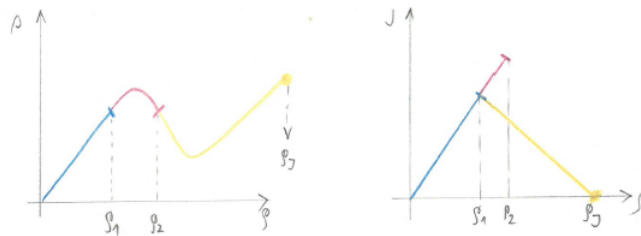
a

$$A = \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{\beta} \mathcal{K}_1(2\sqrt{\beta D})}$$

kde  $\mathcal{K}_1$  značí Macdonaldovu funkci prvního řádu

### 5.6.2 Empirická závislost $\beta = \beta(\varrho)$

$\beta$  souvisí s psychickým vypětím řidičů, filtruje (posiluje, zeslabuje) vliv interakčních sil



Obrázek 5.35

Empirická závislost  $\beta = \beta(\varrho)$

### 5.6.3 Úprava rovnice pro sedlový bod

Víme, že  $g(p) = \mathcal{L}[f(r)](p) = \mathcal{L}[\Theta(r) e^{-\beta\varphi(r)}](p)$ . Navíc známe vztah

$$(-1)^n \frac{d^n g}{dp^n} = \mathcal{L}[t^n f(t)](p),$$

odkud plyne, že

$$\frac{dg}{dp} = -\mathcal{L}[rf(r)](p) = \mathcal{L}[-\Theta(r)re^{-\beta\varphi(r)}](p).$$

Po dosažení do rovnice sedlového bodu upravujeme

$$\mathcal{L}[-\Theta(r)re^{-\beta\varphi(r)}](p) = -\mathcal{L}[\Theta(r)e^{-\beta\varphi(r)}](p),$$

$$\mathcal{L}[\Theta(r)re^{-\beta\varphi(r)}](p) = \mathcal{L}[\Theta(r)e^{-\beta\varphi(r)}](p),$$

$$\int_0^{+\infty} re^{-\beta\varphi(r)} e^{-rp} dr = \int_0^{+\infty} e^{-\beta\varphi(r)} e^{-rp} dr.$$

Označme  $A^{-1}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta\varphi(r)} e^{-rp} dr$ , pak rovnice

$$A(p) \int_0^{+\infty} re^{-\beta\varphi(r)} e^{-rp} dr = 1,$$

kteřá je alternativním tvarem rovnice pro sedlový bod, odpovídá škálování hustoty pravděpodobnosti  $Ae^{-\beta\varphi(r)}e^{-rp}$  na střední hodnotu rovnou jedné čili rovnice pro sedlový bod je o hledání hodnoty čísla  $p \in \mathbf{R}$  tak, aby  $\mathbb{E}(R) = 1$ .

#### 5.6.4 Modifikovaná Besselova diferenciální rovnice

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - (x^2 + \nu^2) y(x) = 0,$$

kde  $\nu \in \mathbf{R}$  je řád Besselovy rovnice

Pomocný pojem:

- Gamma funkce:  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ , víme o ní pro  $n \in \mathbf{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

a

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n},$$

dále pro obecné  $x \in \mathbf{R}$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

- Digamma funkce:  $\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ , známe

$$\Gamma(1) = -\gamma = -0,57772156649,$$

což je Eulerova-Masheroniova konstanta, dále

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

a

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}.$$

Jedním z řešení modifikované Besselovy rovnice je tzv. Macdonaldova funkce

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n(x) = & (-1)^n \ln\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} + \\ & + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \end{aligned}$$

jež má známé aproximativní chování pro velké hodnoty argumentu  $x$

$$\mathcal{K}_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + \frac{4\alpha^2 - 1}{8x}\right)$$

**Věta 2.** Řeší-li funkce  $y(x)$  modifikovanou Besselovu obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, pak funkce  $z(x) = x y(x)$  řeší rovnici  $x z''(x) - z'(x) - x z(x) = 0$ .

Důkaz.

$$y(x) = \frac{z(x)}{x},$$

odkud

$$y'(x) = \frac{x z'(x) - z(x)}{x^2},$$

odkud zase

$$y''(x) = \frac{x^2 z''(x) - 2x z'(x) + 2z(x)}{x^3},$$

dosazením uvedeného výše do modifikované Besselovy obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - (x^2 + 1) y(x) = 0$$

obdržíme rovnici

$$x z''(x) - z'(x) - x z(x) = 0.$$

□

**Věta 3.** Funkce  $z(x) := \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt$  vyhovuje rovnici  $x z''(x) - z'(x) - x z(x) = 0$ .

Důkaz. Derivujeme integrál podle parametru

$$\frac{dz}{dx} = \left| \begin{array}{l} z(0) = 1 \\ \text{integrand je měřitelný} \\ \left| \frac{df}{dz} \right| = \frac{x}{2t} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} \leq \frac{x}{t} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} \leq \frac{2}{\epsilon} e^{-t} \end{array} \right| = - \int_0^{+\infty} \frac{x}{2t} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt.$$

Pomocný výpočet k diskuzi výše

$$h(t) := \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s}{e^{\frac{x^2}{4} s}} = 0.$$

Hledáme maximum

$$h'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{x^2}{4} \frac{1}{t^2} \stackrel{!}{=} 0,$$

odkud  $t = \frac{x^2}{4}$ . Potom

$$h_{\max} = \max_{t \in \mathbb{R}^+} h(t) = \frac{4}{x^2} e^{-1},$$

odkud již můžeme odhadnout pro  $0 < \epsilon < x$

$$\left| \frac{x}{t} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} \right| \leq x \frac{4}{x^2} \frac{1}{e} e^{-t} \leq \frac{2}{x} ]e^{-t} \leq \frac{2}{\epsilon} e^{-t}.$$

Analogicky bychom ospravedlnili záměnu derivace a integrálu při výpočtu  $\frac{d^2 z}{dx^2}$ . Upravme jej jako

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{x}{2t} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt = -\frac{1}{2t} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2t} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt.$$

Nyní již dosadíme do ve větě zmiňované rovnice

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{x}{2t} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{x}{2t} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} 0,$$

kde se dva prostřední integrály odečtou. Ukažme nyní úpravou posledního z nich, že je rovnost opravdu splněna

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad v' = e^{-t} \\ u' = \frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad v = -e^{-t} \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt.$$

Důkaz je tímto tedy završen. □

## 5.7 Normalizace a škálování Cimrmanovy hustoty pravděpodobnosti

$$p(r) = A e^{-\frac{r}{\tau}} e^{-Dr},$$

kde požadujeme splnění rovnosti  $\mathbb{E}(R) \stackrel{!}{=} 1$ .

Dokázali jsme, že řeší-li funkce  $y(x)$  modifikovanou Besselovu obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, pak funkce  $z(x) = x y(x)$  řeší rovnici  $x z''(x) - z'(x) - x z(x) = 0$ . Navíc jsme ještě ukázali, že funkce  $z(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt$  vyhovuje právě této rovnici. Můžeme tedy psát, že

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt = x B(x),$$

kde  $B(x)$  je nějaké řešení modifikované Besselovy obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu. Označme tedy  $z(x) := x B(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt$ . Pokračujme  $z(0) = 1$  a  $z'(0) = 0$  (záměna bez problémů možná, viz předešlá věta). Mějme

$$\mathcal{K}_1(x) = -I_1(x) \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k+2)}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1},$$

kde

$$I_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}.$$

Označme  $w(x) := x \mathcal{K}_1(x)$ , tedy

$$w(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k+2)}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2},$$

odkud

$$w'(x) = -2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k+2}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k+2)}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}.$$

Platí tedy  $w(0) = 1$  a  $w'(0) = 0$ . Navíc lze ukázat, že

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x w''(x) = 0.$$

Jako závěr zde dostáváme, že  $z(x)$  a  $w(x)$  vyhovují stejné Cauchyově úloze, a díky větě o jednoznačnosti jejího řešení pak platí, že  $z(x) = w(x)$ , navíc

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-t} dt = x \mathcal{K}_1(x).$$

### 5.7.1 Aproximace Macdonaldovy funkce

Zavádíme novou funkci

$$y(x) = x e^x \mathcal{K}_1(x).$$

Okrajové podmínky pro Cauchyovu úlohu, nejprve první

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} x e^x \mathcal{K}_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^x \lim_{x \rightarrow 0_+} x \mathcal{K}_1(x) = 1,$$

nyiní druhá

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} [x e^x \mathcal{K}_1(x)]' = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^x (x \mathcal{K}_1(x)) + \lim_{x \rightarrow 0_+} e^x (x \mathcal{K}_1(x))' = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^x \lim_{x \rightarrow 0_+} (x \mathcal{K}_1(x))' + \lim_{x \rightarrow 0_+} y(x) = 1.$$

Dále upravme

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x y''(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} x (e^x x \mathcal{K}_1(x))'' = \lim_{x \rightarrow 0_+} x e^x (x \mathcal{K}_1(x))'' + \lim_{x \rightarrow 0_+} x e^x x \mathcal{K}_1(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 0_+} x e^x (x \mathcal{K}_1(x))' = 0.$$

Celkem tedy  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$  a  $\lim_{x \rightarrow 0_+} x y''(x) = 0$ .

Vyjádřeme nyní

$$\mathcal{K}_1(x) = \frac{y(x)}{x} e^{-x},$$

odkud první derivaci vyjádříme jako

$$\mathcal{K}'_1(x) = e^{-x} \left( \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} - \frac{y(x)}{x} \right)$$

a druhou derivaci jako

$$\mathcal{K}''_1(x) = e^{-x} \left( \frac{y''(x)}{x} - \frac{2y'(x)}{x^2} + \frac{2y(x)}{x^3} + \frac{2y(x)}{x^2} - \frac{2y'(x)}{x} + \frac{y(x)}{x} \right).$$

Po dosazení do modifikované Besselovy obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu dostáváme

$$x y''(x) - (1 + 2x) y'(x) + y(x) = 0,$$

kde pro  $|x| \ll 1$  můžeme první sčítanec dle výpočtu výše zanedbat a tuto rovnici aproximujeme rovnicí

$$(1 + 2x) y'(x) - y(x) = 0$$



s počátečními podmínkami  $y(0_+) = 1$  a  $y'(0_+) = 1$ . Tu vyřešíme aplikací metody integračního faktoru, který v tomto případě odpovídá funkci  $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ . Odtud získáme, že  $y(x) = C \cdot \sqrt{1+2x}$ , kde  $C$  je integrační konstanta. Z Cauchyho podmínek pak obdržíme výsledný tvar

$$y(x) = \sqrt{1+2x},$$

odkud již obdržíme finální tvar aproximace Macdonaldovy funkce pro malé hodnoty  $x$ , a to

$$\mathcal{K}_1(x) \approx \frac{\sqrt{1+2x}}{x} e^{-x}.$$

### 5.7.2 Normalizace

Máme hustotu pravděpodobnosti  $p(x) = A e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-Dx}$ , tedy normalizační konstantu spočteme jako

$$A^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-Dx} dx = \left| \begin{array}{l} Dx = y \\ D dx = dy \end{array} \right| = \frac{1}{D} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\beta D}{y}} e^{-y} dy = \left| \frac{\alpha^2}{4} = \beta D \right| = \frac{\alpha}{D} \mathcal{K}_1(\alpha).$$

Celkem po dosazení za  $\alpha$  získáváme

$$A^{-1} = 2 \sqrt{\frac{\beta}{D}} \mathcal{K}_1(2 \sqrt{\beta D}).$$

Tento vztah ještě užitím aproximace Macdonaldovy funkce pro malé hodnoty  $\beta$  můžeme pro tyto hodnoty zapsat v přibližném tvaru

$$A^{-1} \approx \frac{e^{-2\sqrt{\beta D}}}{D} (1 + 4\sqrt{\beta D})^{1/2} \approx \frac{e^{-2\sqrt{\beta D}}}{D} (1 + 2\sqrt{\beta D}),$$

kde jsme v posledním aproximovnitku využili možnosti aproximovat  $\sqrt{1+y}$  jako  $1 + \frac{1}{2}y$ .

### 5.7.3 Škálování

Teď chceme splnit podmínku  $\mathbb{E}(R) \stackrel{!}{=} 1$ , tj.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-\kappa^2 t} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-\kappa^2 t} dt.$$

Levou stranu této rovnosti označme jako funkci  $J(x, \kappa)$ . Díky tomuto značení můžeme říci, že naopak levá strana této podmínky je rovna  $-\frac{1}{2\kappa} \frac{\partial J}{\partial \kappa}$ , platí tedy

$$J(x, \kappa) = -\frac{1}{2\kappa} \frac{\partial J}{\partial \kappa}.$$

Funkci  $J$  můžeme vyjádřit také jako

$$J(x, \kappa) = \left| \begin{array}{l} y = \kappa^2 t \\ dt = \frac{1}{\kappa^2} dy \end{array} \right| = \frac{1}{\kappa^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x\kappa)^2}{4y}} e^{-y} dy = \frac{x}{\kappa} \mathcal{K}_1(x\kappa).$$

Pomocí výše zmíněného sestavujeme rovnici pro funkci  $J$  - do rovnice

$$\frac{\partial J}{\partial \kappa} = -\frac{x}{\kappa^2} \mathcal{K}_1(x\kappa) + \frac{x^2}{\kappa} \mathcal{K}_1'(x\kappa)$$

dosadíme funkci  $J$  vyjádřenou pomocí Macdonaldovy funkce a po úpravě obdržíme univerzální škálovací rovnici

$$(2\kappa^2 - 1) \mathcal{K}_1(x\kappa) = -x\kappa \mathcal{K}_1'(x\kappa), \quad (5.1)$$

kterou budeme dále řešit pomocí aproximací.

### 5.7.4 Aproximace pro malá $\beta$

Dosadíme naši aproximaci Macdonaldovy funkce pro malé hodnoty  $\beta$  do škálovací rovnice (5.1) a obdržíme rovnici pro  $\kappa = \kappa(x)$

$$2\kappa^3 x + (1 - x^2)\kappa^2 - 2\kappa x - 1 = 0, \quad (5.2)$$

kde platí dle naší úvodní parametrizace  $\kappa^2 = D$  a  $\frac{1}{4}x^2 = \beta$ .

V Erlangově distribuci, která byla odvozena jako steady-state distribuce pro logaritmický potenciál, vyšlo přímou metodou, že  $D = \beta + 1$  pro všechna  $\beta \geq 0$ . V řeči  $\kappa$  a  $x$  to značí, že  $\kappa^2 = \frac{x^2}{4} + 1$ . Pro velká  $x$  je tedy  $\kappa \approx \frac{x}{2}$ . Ověřme, zda podobná lineární asymptota neexistuje i pro vyvážený harmonický potenciál, tj. pro škálovací rovnici (5.2). Hledáme tedy směrnicí lineární asymptoty  $\alpha$  funkce  $\kappa(x)$ , tj.  $\kappa(x) = \alpha x$ , což dosadíme právě do (5.2) a získáme rovnici

$$2\alpha^3 x^4 + (1 - x^2)\alpha^2 x^2 - 2\alpha x^2 - 1 = 0,$$

kteřou vydělíme  $x^4$  jakožto členem s nejvyšší mocninou, a následně pošleme  $x$  do plus nekonečna, čímž obdržíme rovnici pro  $\alpha$

$$2\alpha^3 - \alpha^2 = 0,$$

odkud finalizujeme  $\alpha = \frac{1}{2}$ , tj. pro velká  $x$  platí

$$\frac{\kappa}{x} \approx \frac{1}{2}.$$

Nyní směřujeme za vyjádřením asymptoty pro funkci  $D = D(\beta)$ . Vydělíme opět rovnici (5.2)  $x^4$

$$2\kappa^3 + \frac{\kappa}{x}\kappa - x\kappa^2 - 2\kappa - \frac{1}{x} = 0,$$

kteřou opět budeme zkoumat v plus nekonečnu, zároveň zde ale využijeme znalosti směrnic této asymptoty, obdržíme pak rovnici kvadratickou v  $\kappa$

$$4\kappa^2 - 2x\kappa - 3 = 0.$$

Odtud máme  $\kappa = \frac{1}{4}(x + \sqrt{x^2 + 12})$  (záporný kořen neuvažujeme). Dle zavedené parametrizace vyjádříme tvar škálovací konstanty  $D$  jako

$$D = \kappa^2 = \frac{3}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3\beta + \beta^2}.$$

Nyní již můžeme přejít k hledání směrnic a absolutního členu asymptoty funkce  $D(\beta)$ . Nejprve směrnic

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{D(\beta)}{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{4\beta} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\beta} \sqrt{3\beta + \beta^2} \right) = 1,$$

pak absolutní člen

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} (D(\beta) - \beta) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3\beta + \beta^2} \right) = \frac{3}{2}.$$

Celkem tedy

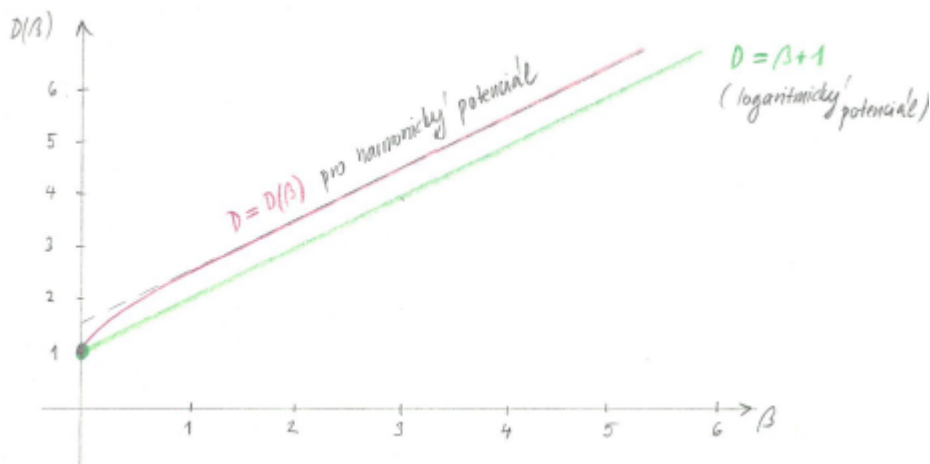
$$D(\beta) \approx \beta + \frac{3}{2}.$$

### 5.7.5 Aproximace pro velké hodnoty $\beta$

Použijeme tentokrát jinou pro tento případ vhodnou aproximaci

$$\mathcal{K}_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \left( \frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{9}{16x^{5/2}} \right),$$

kterou opět dosadíme do (5.1) budeme postupovat naprosto obdobně jako v předchozím případě. Výsledná asymptota vyjde taktéž naprosto stejně jako v předchozím případě.



Obrázek 5.36  
Asymptota škálovací konstanty

Fenomenologická aproximace závislosti  $D(\beta)$

$$D = \beta + \frac{3 - e^{-\sqrt{\beta}}}{2}$$

### 5.7.6 Analýza škálovací rovnice

Jaké vlastnosti má funkce  $\kappa = \kappa(x)$  zadaná implicitně škálovací rovnicí

$$2\kappa^3 x + (1 - x^2)\kappa^2 - 2\kappa x - 1 = 0$$

1

definují implicitní funkce  $\kappa(x)$ , které jsou rostoucí:  $\kappa(x)$  rostoucí  $\Rightarrow \kappa'(x)$  není na  $(0, +\infty)$  nulová  $\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x} \neq 0$ .

$$\kappa'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial \kappa}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial x} \neq 0.$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2\kappa^3 - 2x\kappa^2 - 2\kappa = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa^2 - x\kappa - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x\kappa = \kappa^2 - 1$$

dosadíme do  $G(x, \kappa) = 0$ :

$$2\kappa^2(\kappa^2 - 1) + \kappa^2 - (\kappa^2 - 1)^2 - 2(\kappa^2 - 1) - 1 = 0$$

$$\kappa^2(\kappa^2 - 1) = 0$$

$\kappa = 0$  nemá význam, dále uvažujeme jen  $\kappa = 1$ , odkud  $x = 0$  (krajní bod)  $\Rightarrow$  q. e. d.

2

$$\vec{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y) = (0, 1)$$

3

$\kappa = \kappa(x)$  je generující rovnicí zadána všude v prvním kvadrantu, neboť

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 6 \kappa^2 x + 2 \kappa (1 - x^2) - 2 x = 0$$

nenastává pro žádnou  $(x, \kappa)$  z prvního kvadrantu, dokážeme: máme soustavu rovnic

$$3 \kappa^2 x + \kappa (1 - x^2) - x = 0,$$

$$2 \kappa^2 (\kappa^2 - 1) + \kappa^2 - (\kappa^2 - 1)^2 - 2 (\kappa^2 - 1) - 1 = 0,$$

kde první vynásobíme  $\kappa$  a druhou  $-1$ , a poté je sečteme, obdržíme

$$\kappa^3 x + \kappa x + 1 = 0,$$

odkud

$$x = -\frac{1}{\kappa(\kappa^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow \kappa > 0 \Rightarrow x < 0$$

4

$\kappa(x)$  nemá v prvním kvadrantu žádný stacionární bod - viz bod 1

5

$\kappa(x)$  má všude v prvním kvadrantu derivaci, která nemění znaménko  $\Rightarrow \kappa(x)$  je tedy striktně monotónní

6

$\kappa = \kappa(x)$  je v prvním kvadrantu rostoucí - zkoumejme, zda existuje  $x > 0$  takové, že by  $\kappa = 2$ :

$$16x + (1 - x^2)4 - 4x - 1 = 0$$

$$x^2 - 3x - \frac{3}{4} = 0,$$

odkud

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \text{řešení v prvním kvadrantu existuje}$$

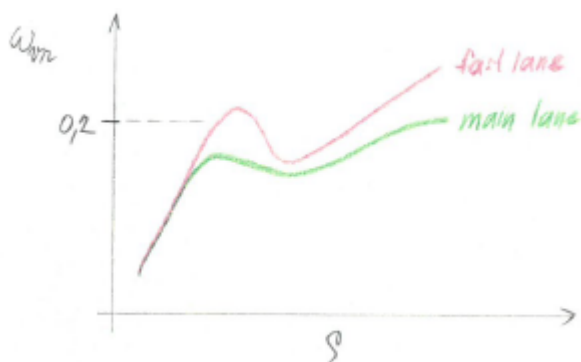
## 5.8 Odvození time-clearance distribuce

Z podstaty empirických měření je analýza časových světlostí mnohem výhodnější, headwaye nejsou totiž zatíženy systematickou chybou.

Sdružená hustota pravděpodobnosti pro polohu a rychlost:

$$f(r, v) = q(v) p(r),$$

předpokládáme ale nezávislost rychlosti a odstupů (při konstantní hustotě to není nereálné) - studie korelací mezi  $v$  a  $r$  ukazuje na slabou závislost - jisté korelace tu jsou (což je očekávané), je to důsledek vytváření kolon (platoons).



Obrázek 5.37  
Korelace  $v$  a  $r$

Odvození tedy provedeme za teoretického předpokladu o statistické nezávislosti  $v$  a  $r$ . Sdružená hustota pravděpodobnosti pro časovou světlost a rychlost

$$g(t, w) = \left| \begin{array}{c} f(r, v) \\ r = t w \\ v = w \\ \det\left(\frac{D(r, v)}{D(t, w)}\right) = \left| \begin{array}{cc} w & t \\ 0 & 1 \end{array} \right| = w \end{array} \right| = w f(w t, w) = v q(v) p(v t).$$

Hustota pravděpodobnosti pro časovou světlost je pak marginální hustota odvozená z  $g(t, v)$ , tj.

$$\tau(t) = \int_{\mathbf{R}} v q(v) p(v t) dv.$$

Jak to ale udělat? Funkci  $h(v) = v p(v t)$  rozvineme do Taylorovy řady se středem v bodě  $w = \mathbb{E}(v)$ , tedy

$$h(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n h}{dv^n}(w) (v - w)^n.$$

Odvozujeme postupně

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dv} &= p(v t) + v t \frac{dp}{d(v t)}, \\ \frac{d^2 h}{dv^2} &= 2t \frac{dp}{d(v t)} + v t^2 \frac{d^2 p}{d(v t)^2}, \\ \frac{d^n h}{dv^n} &= n t^{n-1} \frac{d^{n-1} p}{d(v t)^{n-1}} + v t^n \frac{d^n p}{d(v t)^n}, \\ \frac{d^n h}{dv^n}(w) &= n t^{n-1} \frac{d^{n-1} p}{d(v t)^{n-1}}(w) + w t^n \frac{d^n p}{d(v t)^n}. \end{aligned}$$

Označme  $\mu_n$   $n$ -tý centrální moment normálního rozdělení, tj.

$$\mu_n = \int_{\mathbf{R}} (v - w)^n q(v) dv.$$

Odvozujeme

$$\begin{aligned}
 \tau(t) &= \int_{\mathbf{R}} w p(w t) q(v) dv + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{n!} \left( n t^{n-1} \frac{d^{n-1} p}{d(v t)^{n-1}}(w) + w t^n \frac{d^n p}{d(v t)^n} \right) (v-w)^n q(v) dv = \\
 &= w p(w t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu_n}{n!} \left( n t^{n-1} \frac{d^{n-1} p}{d(v t)^{n-1}}(w) + w t^n \frac{d^n p}{d(v t)^n} \right) = \left| \begin{array}{ll} \mu_0 = 1 & \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = \sigma^2 & \mu_3 = 0 \\ \mu_{2k} = \frac{(2k)!}{(2k)!!} \sigma^{2k} & \mu_{2k-1} = 0 \end{array} \right| = \\
 &= w p(w t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sigma^{2k}}{(2k)!!} \left( 2k t^{2k-1} \frac{d^{2k-1} p}{dr^{2k-1}}(w t) + w t^{2k} \frac{d^{2k} p}{dr^{2k}}(w t) \right).
 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o hustotu pravděpodobnosti, musí platit  $\int_0^{+\infty} \tau(t) dt = 1$ .

Je-li rozptyl  $\sigma^2$  malý, pak  $\tau(t) \approx w p(w t)$  - což je hrubá aproximace (jednotkový integrál je i tak splněn - po přeškálování na  $E(t) = 1$  má tvar  $\tau(t) = \Theta(t) A e^{-\frac{\beta}{t}} e^{-D t}$ ). Reálně ale  $\sigma^2$  není malé, ale  $\sigma^4$  již malé je, tedy

$$\tau(t) \approx w p(w t) + \frac{\sigma^2}{2} \left( 2 t \frac{dp}{dr}(w t) + w t^2 \frac{d^2 p}{dr^2}(w t) \right).$$

Vidíme, že pokud zintegrujeme

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{R}} \left( 2k t^{2k-1} \frac{d^{2k-1} p}{dr^{2k-1}}(w t) + w t^{2k} \frac{d^{2k} p}{dr^{2k}}(w t) \right) dt &= \int_{\mathbf{R}} 2k t^{2k-1} \frac{d^{2k-1} p}{dr^{2k-1}}(w t) dt + \\
 &+ \left[ w t^{2k} \frac{1}{w} \frac{d^{2k-1} p}{dr^{2k-1}}(w t) \right]_0^{+\infty} - \int_{\mathbf{R}} 2k t^{2k-1} \frac{d^{2k-1} p}{dr^{2k-1}}(w t) dt = 0,
 \end{aligned}$$

neboť chvost  $p(r)$  je úměrný  $e^{-r}$ . Odtud vidíme, že člen  $\frac{\sigma^{2k}}{(2k)!!} \left( 2k t^{2k-1} \frac{d^{2k-1} p}{dr^{2k-1}}(w t) + w t^{2k} \frac{d^{2k} p}{dr^{2k}}(w t) \right)$  je jakýmsi poruchovým členem.

## 5.9 Technika zpracování empirických dat

Pro každý  $j$ -tý vzorek  $S_j$  o  $m$  po sobě jedoucích vozidlech vypočteme

1. výběrový lokální tok (fluxi)

$$J_j = \frac{m}{\tau_{jm}^{(out)} - \tau_{(j-1)m+1}^{(in)}},$$

2. výběrovou lokální hustotu

$$\rho_j = \frac{J_j}{\bar{v}_j},$$

$$\text{kde } \bar{v}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} v_k,$$

3. výběrovou průměrnou časovou světlost

$$\bar{t}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} t_k,$$

## 4. výběrovou průměrnou délkovou světlost

$$\bar{r}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=(j-1)m+1}^{jm} r_k.$$

Poté vybereme data z předem definované podoblasti fundamentálního diagramu, tj. najdeme množinu všech indexů  $j$ , označme ji  $\Omega$ , pro něž platí

$$(\varrho_j, J_j) \in \langle \varrho, \varrho + \Delta\varrho \rangle \times \langle J, J + \Delta J \rangle.$$

Pak sestavíme množiny

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \left\{ t_{(j-1)m+k} \cdot \frac{1}{t_j} : j \in \Omega \wedge k \in \hat{m} \right\}, \\ \tilde{R} &= \left\{ r_{(j-1)m+k} \cdot \frac{1}{r_j} : j \in \Omega \wedge k \in \hat{m} \right\}, \end{aligned}$$

kde  $\tilde{T}$ , resp.  $\tilde{R}$  je tedy množina škálovaných časových, resp. prostorových světlostí příslušných vybrané podoblasti fundamentálního diagramu. Pro  $\tilde{T}$ , resp.  $\tilde{R}$  pak provedeme standardní statistickou analýzu. Pro získaný empirický histogram pak ve třídě zvolených distribucí  $\{\tau(t|\beta) : \beta \in \mathbf{R}_0^+\}$ , resp.  $\{p(r|\beta) : \beta \in \mathbf{R}_0^+\}$  hledáme vhodnou metodou odhadovanou (optimální) hodnotu parametru. Metody jsou to následující

- MLE,
- metoda nejmenších čtverců,
- minimalizace obecné statistické vzdálenosti (MDE)

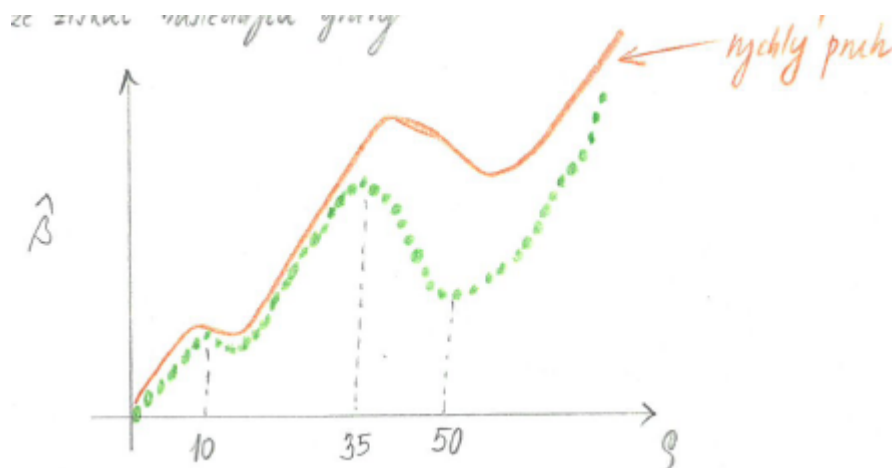
$$\begin{aligned} \chi(\beta) &= \varrho_w(\tau(t|\beta), \text{hist}(t)) = \|\tau - \text{hist}\|_w = \langle \tau(t|\beta) - \text{hist}(t) | \tau(t|\beta) - \text{hist}(t) \rangle^{1/2} = \\ &= \left( \int_0^{+\infty} |\tau(t|\beta) - \text{hist}(t)|^2 w(t) dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

kde váha  $w(t)$  může být volena s ohledem na typ a kvalitu dat; tj.

$$\hat{\beta} := \operatorname{argmin}_{\beta \in \mathbf{R}_0^+} \|\tau(t|\beta) - \text{hist}(t)\|_w,$$

- Kolmogorov-Smirnovův test (KS test), kde se srovnávají teoretické a empirické distribuční funkce.

Poté lze získat následující grafy, případně i jejich 3D alternativy.



Obrázek 5.38  
Odhad parametru  $\beta$

## 5.10 Vliv mikroskopických interakčních pravidel na makroskopické závislosti

Tedy jak ovlivňují individuální interakce tvar fundamentálního diagramu?

$$a_k(\tau) = \dot{v}_k(\tau) = \lambda \frac{v_{k-1}(\tilde{\tau}) - v_k(\tilde{\tau})}{x_{k-1}(\tilde{\tau}) - x_k(\tilde{\tau})}, \quad (5.3)$$

kde  $\tilde{\tau} = \tau - \Delta_\tau$ . S pomocí této rovnice odvodíme vztah mezi průměrnou hustotou  $\rho$  a průměrnou rychlostí na jednodimenzionální vozovce (viz Monteoll, 1969). Integrací rovnice (5.3) získáme

$$\dot{v}_k(\tau) = \lambda \frac{d}{d\tau} \ln [x_{k-1}(\tau - \Delta_\tau) - x_k(\tau - \Delta_\tau)],$$

odkud

$$v_k(\tau) - \lambda \ln [x_{k-1}(\tau - \Delta_\tau) - x_k(\tau - \Delta_\tau)] = \text{konst}_\tau,$$

tj.

$$v_k(\tau_1) - \lambda \ln [x_{k-1}(\tau_1 - \Delta_\tau) - x_k(\tau_1 - \Delta_\tau)] = v_k(\tau_2) - \lambda \ln [x_{k-1}(\tau_2 - \Delta_\tau) - x_k(\tau_2 - \Delta_\tau)].$$

Odstup mezi vozidly (po sobě jedoucími) je propojen s hustotou dopravy jako

$$\frac{1}{\rho_k(\tau)} = x_{k-1}(\tau) - x_k(\tau).$$

My ale hledáme globální popis, tj. průměrné hodnoty hustoty a rychlosti. Označme

$$w(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k(\tau)$$

a

$$\ln \rho(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \rho_k(\tau) = \frac{1}{N} \ln \left[ \prod_{k=1}^N \rho_k(\tau) \right],$$

odkud obdržíme geometrický průměr

$$\rho^N(\tau) = \prod_{k=1}^N \rho_k(\tau)$$

$$\rho(\tau) = \left( \prod_{k=1}^N \rho_k(\tau) \right)^{1/N}.$$

Dosadíme do vztahu výše

$$v_k(\tau) - \lambda \ln \left[ \frac{1}{\rho(\tau - \Delta_\tau)} \right] = \text{konst},$$

obě strany rovnice vsumíme

$$w(\tau) + \lambda \ln \rho(\tau - \Delta_\tau) = \text{konst},$$

odkud

$$w(\tau_1) + \lambda \ln \rho(\tau_1 - \Delta_\tau) = w(\tau_2) + \lambda \ln \rho(\tau_2 - \Delta_\tau),$$

kde  $\Delta_\tau$  je časové zpoždění, pokud se dopravní proudění dramaticky nevyvíjí, lze položit  $\Delta_\tau \sim 0$ , tj.

$$w(\tau) + \lambda \ln \rho(\tau) = \text{konst}.$$



## 5.10. VLIV MIKROSKOPICKÝCH INTERAKČNÍCH PRAVIDEL NA MAKROSKOPICKÉ ZÁVISLOSTI

Hodnotu konstanty určíme ze skutečnosti, že při kritické hodnotě  $\rho = \rho_{kr}$  dopravní proudění ustane, tj.  $w(\tau) = 0$ . Tedy

$$0 + \lambda \ln \rho_{kr} = \text{konst}$$

a jelikož

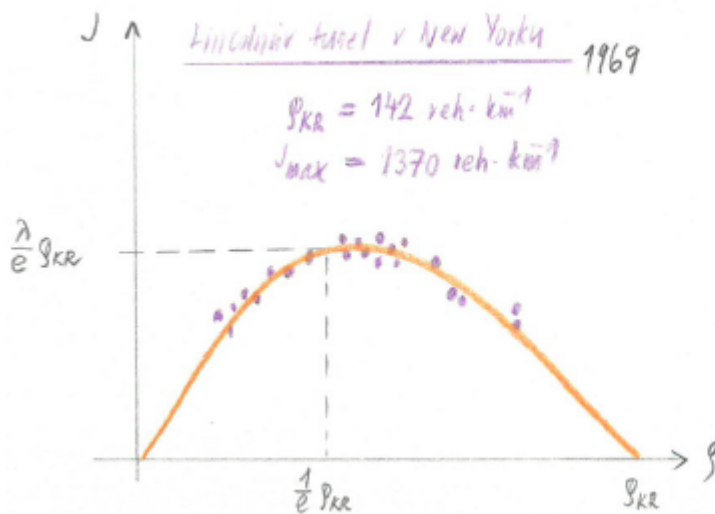
$$w(\tau) + \lambda \ln \rho(\tau) = \lambda \ln \rho_{kr},$$

což dohromady dává

$$w = \lambda \ln \frac{\rho_{kr}}{\rho},$$

což je nám známý Greenbergův vztah z roku 1939. Fundamentální vztah má pak zřejmou podobu

$$J = \rho w = \lambda \rho \ln \frac{\rho_{kr}}{\rho}.$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \frac{dJ}{d\rho} &= \ln \frac{\rho_{kr}}{\rho} - 1 \stackrel{!}{=} 0 \\ \rho_0 &= \frac{1}{e} \rho_{kr} \\ \Rightarrow \text{argmax } J &= \frac{1}{e} \rho_{kr} \Rightarrow \\ \max J(\rho) &= \lambda \cdot \frac{1}{e} \rho_{kr} \cdot 1 \end{aligned}$$

**Obrázek 5.39**  
Fundamentální diagram



# Kapitola 6

## Teorie balancovaných distribucí

Proces fitování reálných headway distribucí má svá omezení. Některé teoretické křivky (grafy teoretický hustot pravděpodobnosti) nesplňují podstatu headway distribucí. Ty musí splňovat následující kritéria

1. teoretická, jakými jsou

- pozitivita, tj. pro všechna  $x \in \mathbf{R}$  platí  $f(x) \geq 0$ ;
- omezený nosič, tj.  $\text{supp}(f) = (0, +\infty)$ ;
- normalizace, tj.  $\int_{\mathbf{R}} f(x) dx = 1$ ;
- škálování, tj.  $\int_{\mathbf{R}} x f(x) dx = 1$ ;

2. empirická, jakými jsou

- spojitost, tj.  $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^+)$ ;
- platí v nule, tj. pro všechna  $m \in \mathbf{N}$  platí  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^m} = 0$ , resp. pro všechna  $m \in \mathbf{N}$  platí  $\frac{d^m f}{dx^m}(0^+) = 0$ ;
- příslušnost do třídy balancovaných distribucí.

**Definice 1.** Řekneme, že  $\lambda$ -měřitelná funkce  $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  je hustotou, pokud pro všechna  $x \in \mathbf{R}$  platí  $f(x) \geq 0$  a  $f(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$  a  $\text{supp}(f) = (0, +\infty)$ .

**Definice 2.** Necht'  $f(x)$  je hustota. Řekneme, že  $f(x)$  je balancovaného růstu, ozn. symbolem  $f(x) \in \mathcal{B}$ , existuje-li  $\omega > 0$  tak, že

1. pro  $\alpha > \omega$  platí  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{\alpha x} = +\infty$ ,
2. pro  $\alpha \in (0, \omega)$  platí  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{\alpha x} = 0$ .

### Motivace

Dopravní interakce jsou přinejmenším střednědosahové. Tedy pohyby vzdálených vozidel nejsou korelovány (ani v kongesčních tocích). Takové soubory dat nazýváme kvazipoissonovskými. Za poissonovské soubory (čistě poissonovské) považujeme ty soubory, jejichž všechny přidružené podsoubory jsou nezávislé - tzv. poissonovská statistika, tj. pravděpodobnost pro výskyt několika elementů uvnitř prostorového nebo časového regionu se řídí Poissonovým rozdělením

$$\mathbb{P}[\mathcal{N} = n|T] = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}.$$

Je-li interakce mezi agenty nenulová (ale střednědosahová - maximálně), poissonovská charakteristika je porušena. Ale vzdálení agenti se stále chovají jako vzájemně nezávislí - mezi vzdálenými (odlehými)

agenty stále funguje poissonovská statistika. Tedy chvosty headway distribucí poissonovských a kvazi-poissonovských souborů musejí být podobné, tj. exponenciální. To je motivace k definici balancovaných distribucí.

**Definice 3.** Necht  $f(x) \in \mathcal{B}$ . Číslo  $\omega > 0$  z předešlé definice nazveme *balančním indexem* a označíme  $\text{inb}(f) = \omega$ .

**Definice 4.** Je-li  $f(x) \in \mathcal{B}$  a  $\text{inb}(f) = \omega$ , pak funkci  $g(x) := f(x) e^{\omega x}$  nazveme *balančním jádrem balancované funkce*  $f(x)$ .

**Věta 4.** Je-li  $g(x)$  libovolné balanční jádro, pak pro všechna  $\tau > 0$  platí, že  $h(x) := g(x) e^{-\tau x} \in \mathcal{B}$ , a navíc  $\text{inb}(h) = \tau$ .

*Důkaz.* Zvolme  $\alpha > \tau$  libovolně, pak můžeme psát

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) e^{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) e^{-\tau x} e^{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{\omega x} e^{-\tau x} e^{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{\omega x} e^{(\alpha - \tau)x} = +\infty.$$

Nyní zvolme  $\alpha \in (0, \tau)$  a rovněž ho zvolme libovolně, pak

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) e^{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{\omega x} e^{(\alpha - \tau)x} = 0.$$

Celkem tedy uzavíráme s tím, že  $h(x) \in \mathcal{B}$  a  $\text{inb}(h) = \tau$ . □

Příklady balančních jader,  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$  a  $n \in \mathbf{N}$ :

1.  $\Theta(x) \alpha$ ,
2.  $\Theta(x) x^\alpha$ ,
3.  $\Theta(x) e^{-\frac{1}{x^\alpha}}$ ,
4.  $\Theta(x) \frac{x^n}{1+x^n}$ ,
5.  $\Theta(x) \frac{1}{x^\alpha} e^{-\frac{1}{x^\beta}}$ .

**Věta 5.** Necht  $f(x) \in \mathcal{B}$  a  $\omega = \text{inb}(f)$ . Pak pro každé  $\alpha \in \langle 0, \omega \rangle$  platí, že  $f(x) e^{\alpha x} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}) \cap \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ .

*Důkaz.* Pro funkce z  $\mathcal{W}$  je rozhodnutí o příslušnosti do  $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$  totožné s rozhodnutím o příslušnosti do  $\mathcal{L}(\mathbf{R})$ , neboť funkce z  $\mathcal{W}$  jsou nezáporné.

Zvolme  $\alpha \in \langle 0, \omega \rangle$  libovolně. Jistě existuje  $\beta \in \mathbf{R}$  tak, že  $0 \leq \alpha < \beta < \omega$ . Pro  $f(x) \in \mathcal{B}$  a  $\beta < \omega$  platí, že  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{\beta x} = 0$ , tedy existuje  $K \in \mathbf{R}^2$  a  $\xi \in \mathbf{R}$  tak, že  $|f(x) e^{\beta x}| < K$  pro všechna  $x > \xi$ .

Zjevně  $f(x) e^{\alpha x} \in \mathcal{L}((-\infty, \xi))$ , neboť  $|f(x) e^{\alpha x}| \leq e^{\alpha \xi} |f(x)| \in \mathcal{L}((-\infty, \xi)) \subset \mathcal{L}(\mathbf{R})$  a víme, že  $f(x) = |f(x)| \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ .

Pro  $x > \xi$  ale platí následující

$$|f(x) e^{\alpha x}| = |f(x) e^{\alpha x} e^{\beta x} e^{-\beta x}| < K e^{(\alpha - \beta)x} \in \mathcal{L}((\xi, +\infty)),$$

neboť  $\alpha - \beta < 0$ .

Celkem tedy  $f(x) e^{\alpha x} \in \mathcal{L}((-\infty, \xi))$  a  $f(x) e^{\alpha x} \in \mathcal{L}((\xi, +\infty))$ , tedy  $f(x) e^{\alpha x} \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ , resp.  $f(x) e^{\alpha x} \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ . □

**Věta 6.** Necht  $g(x)$  je balanční jádro. Potom platí

1.  $\text{supp}(g) = (0, +\infty)$ ;
2.  $A x^m g(x)$  je balančním jádrem pro všechna  $A, m \in \mathbf{R}^+$ ;

---

3. pro všechna  $\tau > 0$  a  $m > 0$  platí, že  $\sup |x^m g(x) e^{-\tau x}| < +\infty$ ;

4. jsou-li  $g_1(x)$  a  $g_2(x)$  balanční jádra, je  $g_1(x) g_2(x)$  také balančním jádrem;

5.  $\int_0^x g(y) dy$  je také balančním jádrem.

*Důkaz.* Pozorný čtenář si dokáže sám. :-) □

**Věta 7.** Necht  $f(x), h(x) \in \mathcal{B}$  a  $\text{inb}(f) = \omega$  a  $\text{inb}(h) = \vartheta$  a  $c \in \mathbf{R}^+$ . Potom  $f(cx) \in \mathcal{B}$  a  $\text{inb}(f(cx)) = c\omega$  a  $f(x)h(x) \in \mathcal{B}$  a  $\text{inb}(fh) = \omega + \vartheta$ .

*Důkaz.* Pozorný čtenář si dokáže sám. :-) □

**Věta 8.** Jsou-li  $f(x), h(x) \in \mathcal{B}$  a  $\text{inb}(f) = \text{inb}(h) = \omega$ , pak pro každé  $\alpha \in (0, 1)$  platí, že  $g(x) := \alpha f(x) + (1 - \alpha)h(x) \in \mathcal{B}$  a  $\text{inb}(g) = \omega$ .

*Důkaz.* Pozorný čtenář si dokáže sám. :-) □

**Věta 9.** Necht  $f(x) \in \mathcal{B}$  a  $\text{inb}(f) = \omega$ . Pak  $(f \star f)(x) \in \mathcal{B}$  a  $\text{inb}(f \star f) = \omega$ .

*Důkaz.* Pozorný čtenář si dokáže sám. :-) □



# Kapitola 7

## Multiheadway distribuce

Je-li

$$\tilde{T} = \left\{ t_{(j-1)m+k} \cdot \frac{1}{t_j} : j \in \Omega \wedge k \in \hat{m} \right\}$$

množina výběrových světlostí, lze zkoumat statistiku tzv. multisvětlostí

$$\kappa_i^{(n)} = \sum_{k=i}^{i+n} \tilde{t}_k,$$

kde  $i \in \text{card}(\widehat{T}) - n$  a  $\tilde{T} = \{\tilde{t}_k\}$ . Označme  $K_n = \{\kappa_i^{(n)}\}$  množinu škálovaných  $n$ -tých multisvětlostí, nazvěme nultou multisvětlost jako světlost a první multisvětlost je pak součet dvou světlostí, tedy

$$\kappa_1^{(1)} = \sum_{k=1}^{1+1} \tilde{t}_k = \tilde{t}_1 + \tilde{t}_2,$$

$$\kappa_2^{(2)} = \sum_{k=2}^{2+2} \tilde{t}_k = \tilde{t}_2 + \tilde{t}_3 + \tilde{t}_4.$$

Za předpokladu nezávislosti  $\tilde{t}_k$  a  $\tilde{t}_{k+1}$  lze multiclearance statistiku predikovat.

### 7.1 Poissonovské proudění

$\rho \approx 0$

$$\tau(t) = \Theta(t) e^{-t}$$

označme  $\tau_n(t)$  hustotu pravděpodobnosti pro vzdálenost  $n + 2$  vozidel, tedy  $\tau_0(t) = \tau(t)$

$$\tau_1(t) = \tau_0(t) \star \tau_0(t) = \Theta(t) \int_0^t e^{-s} e^{-(t-s)} ds = \Theta(t) t e^{-t}$$

$$\tau_2(t) = \tau_0(t) \star \tau_1(t) = \Theta(t) \int_0^t e^{-s} s e^{-(t-s)} ds = \Theta(t) \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

indukční předpoklad:

$$\tau_n(t) = \frac{\Theta(t)}{n!} t^n e^{-t}$$

důkaz:

$$\tau_{n+1}(t) = \tau_n(t) \star \tau_0(t) = \Theta(t) \int_0^t \frac{1}{n!} s^n e^{-s} e^{-(t-s)} ds = \frac{\Theta(t)}{(n+1)!} t^{n+1} e^{-t}$$

## 7.2 Systém částic s logaritmickou repulzí

$$p(r) = p_0(r) = \Theta(r) \frac{(\beta + 1)^{(\beta+1)}}{\Gamma(\beta + 1)} r^\beta e^{-(\beta+1)r}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ x^\beta e^{-Dx} \star \Theta(x) x^\alpha e^{-Dx} \right] &= \mathcal{L} \left[ \Theta(x) x^\beta e^{-Dx} \right] \cdot \mathcal{L} \left[ \Theta(x) x^\alpha e^{-Dx} \right] = \frac{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha + 1)}{(p + D)^{\alpha+\beta+2}} = \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{(p + D)^{\alpha+\beta+2}} = \mathcal{L} \left[ \frac{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} \cdot x^{\alpha+\beta+1} e^{-Dx} \right] \end{aligned}$$

odkud

$$p_1(r) = \Theta(r) (\beta + 1)^{2(\beta+1)} r^{2\beta+1} e^{-Dr} \frac{1}{\Gamma(2\beta + 2)}$$

$$p_2(r) = \Theta(r) (\beta + 1)^{3(\beta+1)} r^{3\beta+2} e^{-Dr} \frac{1}{\Gamma(3\beta + 3)}$$

$$p_n(r) = \Theta(r) \frac{(\beta + 1)^{(\beta+1)(n+1)}}{\Gamma((n + 1)(\beta + 1))} r^{(\beta+1)n+\beta} e^{-(\beta+1)r}$$

## 7.3 Systém částic s vyváženým potenciálem

$$p(r) = A e^{-\frac{\beta}{r}} e^{-Dr},$$

kde  $\mathbb{E}(R) = 1$

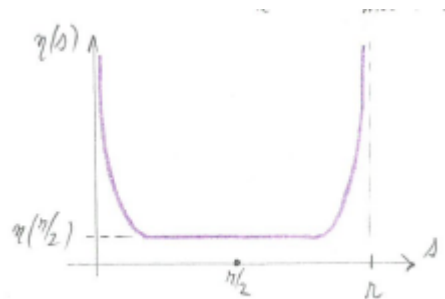
$$p_1(r) = p_0(r) \star p_0(r) = \Theta(r) A^2 \int_0^r e^{\frac{\beta}{s}} e^{-Ds} e^{-\frac{\beta}{r-s}} e^{-D(r-s)} ds = \Theta(r) A^2 e^{-Dr} \int_0^r e^{-\beta(\frac{1}{s} + \frac{1}{r-s})} ds = \text{to be continued...}$$

Laplaceova metoda:

$$\frac{d}{ds} e^{-\beta(\frac{1}{s} + \frac{1}{r-s})} = e^{-\beta(\frac{1}{s} + \frac{1}{r-s})} \left( -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(r-s)^2} \right) \stackrel{!}{=} 0,$$

odkud  $s = \frac{r}{2}$

Integrand nabývá v bodě  $s = \frac{r}{2}$  svého maxima, totiž funkce  $\eta(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{r-s}$  nabývá v bodě  $s = \frac{r}{2}$  svého maxima a  $e^{-\beta x}$  je klesající, pak  $e^{-\beta \eta(s)}$  má v bodě  $s = \frac{r}{2}$  maximum;  $\eta\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{4}{r}$ .





**Obrázek 7.40**  
Funkce  $\eta(s)$

Lze tedy užít větu o hrubém leadingu:  $g(x) = 1$ ,  $a = 0$ ,  $b = r$ ,  $f(x) = -\eta(x) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{r-x}\right)$ ;  $S = \sup_{x \in (0,r)} f(x) = -\frac{4}{r}$ ;  $t = \beta$ ; pak

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^r 1 \cdot e^{-\beta f(x)} dx = e^{\beta S} \int_0^r 1 dx = r e^{-\beta \frac{4}{r}}.$$

návrat k přerušnému výpočtu:

$$\approx \Theta(r) A^2 e^{-Dr} r e^{-\frac{4\beta}{r}}$$

čím je  $\beta$  větší, tím je aproximace přesnější  
indukční předpoklad:

$$\Theta(r) A^{n+1} e^{-Dr} r^n \frac{1}{n!} e^{-\frac{\beta}{r}(n+1)^2}$$

důkaz:

$$p_n(r) = p_n(r) \star p_0(r) = \Theta(r) A^{n+1} e^{-Dr} \int_0^r \frac{s^n}{n!} e^{-\frac{\beta}{s}(n+1)^2} e^{-\frac{\beta}{r-s}} ds = \Theta(r) \frac{A^{n+1}}{n!} e^{-Dr} \int_0^r s^n e^{-\beta \left[ \frac{(n+1)^2}{s} + \frac{1}{r-s} \right]} ds = \text{to be continued...}$$

opět věta o hrubém leadingu:  $g(x) = x^n$ ,  $a = 0$ ,  $b = r$ ,  $f(x) = -\eta(x) = -\left[\frac{(n+1)^2}{x} + \frac{1}{r-x}\right]$ ;  $S = \sup_{x \in (0,r)} f(x)$ ;  
 $t = \beta$

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{(n+1)^2}{x^2} + \frac{1}{(r-x)^2} \stackrel{!}{=} 0,$$

odkud

$$x = \frac{n+1}{n+2} r,$$

což je jistě maximum funkce  $-\eta(x)$ ; pak

$$S = e^{-\beta \left[ \frac{(n+2)(n+1)}{r} + \frac{1}{r(1-\frac{n+1}{n+2})} \right]} = e^{-\frac{\beta}{r}(n+2)^2}$$

pokračování přerušného výpočtu:

$$= \Theta(r) \frac{A^{n+1}}{n!} e^{-Dr} e^{-\frac{\beta}{r}(n+2)^2} \int_0^r s^n ds = \Theta(r) \frac{A^{n+1}}{n!} e^{-\frac{\beta}{r}(n+1)^2} e^{-Dr} r^{n+1},$$

čímž byl indukční předpoklad ověřen

**závěr:**

$$p_n(r) = \Theta(r) \Omega_n e^{-\frac{\beta}{r}(n+1)^2} e^{-Dr} r^{n+1} \quad (7.1)$$

**normalizační procedura:**

$$\Omega_n^{-1} = 2 \left( \sqrt{\frac{\beta}{D}} (n+1) \right)^{n+1} \mathcal{K}_{n+1} \left( 2(n+1) \sqrt{\beta D} \right),$$

navíc pro velká  $\beta$  platí z věty o hrubém leadingu

$$\Omega_n = \frac{A^{n+1}}{n!}$$

navíc platí:

$$\int_{\mathbf{R}} r p_n(r) \, dr = n + 1,$$

kde jde o škálování multisvětlostí

vztah (7.1) zůstává v platnosti i pro  $\beta = 0$ , neboť

$$p_n(r) = \Theta(r) \frac{1}{n!} r^n e^{-Dr}$$

navíc

$$\lim_{\beta \rightarrow 0_+} 2 \left( \sqrt{\frac{\beta}{D}} (n+1) \right)^{n+1} \mathcal{K}_{n+1}(2(n+1) \sqrt{\beta D}) = n!,$$

protože platí  $\lim_{x \rightarrow 0_+} x^{n+1} \mathcal{K}_{n+1}(x) = (2n)!!$  a  $\lim_{\beta \rightarrow 0_+} D(\beta) = 1$  (jako  $x$  označíme  $x := 2(n+1) \sqrt{\beta D}$ , z čehož pak příslušná limita využitím zmíněného triviálně plyne)

# Kapitola 8

## Spojité a diskrétní modely dopravy

### 8.1 Car-following modely

Synonymum: časově spojité modely. Jsou definovány obyčejnými diferenciálními rovnicemi popisujícími kompletní dynamiku systému. Jedná se o mikroskopické modely pro polohy  $x_k$  a rychlosti  $v_k$ , kde  $k \in \hat{N}$ . Rovnice pohybu

$$\dot{x}_k(t) = \dot{v}_k(t) = F(x_k(t); v_k(t); x_{k-1}(t); v_{k-1}(t); \dots; x_{k-n_k}(t); v_{k-n_k}(t)),$$

kde  $k$ -té vozidlo reaguje na  $n_k$  svých předchůdců - v jednodušších modelech volíme  $n_k = 1$  pro všechna  $k \in \hat{N}$ , což je pak krátkodosahová varianta; pro  $n_k > 1$  pak střednědosahová varianta.

Příklady car-following modelů:

- optimal velocity model (OVM) - 1961 Newell a 1995 Bando;
- Wiedemannův model - 1974;
- Gippův model - 1981;
- model inteligentního řidiče (IDM) - 1999 Helbing a Treiber.

#### 8.1.1 Model inteligentního řidiče (IDM)

Polohy a rychlost značíme  $\vec{x}$  a  $\vec{v}$ , délky vozidel  $\vec{d}$ , čistý odstup je pak

$$r_k = x_{k-1} - x_k - d_{k-1}$$

a rozdíl rychlostí

$$\Delta v_k = v_k - v_{k-1}$$

pro všechna  $k \in \hat{N} - \{1\}$ . IDM model je pak definován sadou dvou diferenciálních rovnic

$$\dot{x}_k = v_k, \tag{8.1}$$

$$\dot{v}_k = \alpha \left[ 1 - \frac{v_k}{v_0} - \frac{\omega(v_k, \Delta v_k)}{r_k^2} \right], \tag{8.2}$$

kde  $\omega(v_k, \Delta v_k) := r_0 + v_k T + \frac{v_k \Delta v_k}{2 \sqrt{\alpha \beta}}$ . Parametry modelu jsou tedy následující

- $v_0$ : optimální rychlost pro volný proud;
- $r_0$ : minimální světlost (pro stav kompletní kongesce);

- $T$ : optimální časový odstup k předešlému vozidlu;
- $\alpha$ : zrychlení;
- $\beta$ : pohodlné zpomalení v případě brzdění;
- $\delta$ : koeficient ( $\sim 4$ ).

Charakteristiky modelu: zrychlení vozidel může být rozděleno na dvě části:

### 1. volná doprava

$$\dot{v}_k^{(\text{free})} = \alpha \left( 1 - \frac{v_k^\delta}{v_0^\delta} \right),$$

ve volné dopravě je  $r_k$  velké a druhý člen prakticky vymizí; ve volné dopravě se vozidla přibližují asymptoticky optimální rychlosti:  $r_k \approx v_0 \Rightarrow \dot{v}_k^{(\text{free})}$ ;

### 2. interakční člen

$$\dot{v}_k^{(\text{int})} = -\alpha \frac{\omega^2}{r_k^2} = -\alpha \left[ \frac{r_0 + v_k T}{r_k} + \frac{v_k \Delta v_k}{2 \sqrt{\alpha \beta} r_k} \right]^2,$$

je-li rozdíl rychlostí velký, je interakční člen dominován členem

$$\dot{v}_k^{(1)} = -\alpha \frac{v_k^2 \Delta v_k^2}{4 \alpha \beta r_k^2},$$

který kompenzuje rozdílné rychlosti za sebou jedoucích vozidel s cílem nebrzdit prudčeji než optimální zpomalení  $\beta$ ; je-li vzdálenost vozidel malá a rozdíl rychlostí zanedbatelný, bude interakčnímu členu dominovat

$$\dot{v}_k^{(2)} = -\alpha \frac{(r_0 + v_k T)^2}{r_k^2},$$

což je repulzivní síla, která vede k tomu, že vzdálenosti sousedních vozidel jsou zvětšeny na "rovnovážnou" hodnotu.

## 8.2 Model Nagela a Schreckenberga (1992)

Diskrétní model. Máme celulární mřížku o délce  $L$  s otevřenými konci. Každá buňka může být buď prázdná, nebo obsazená vozidlem. Vozidla mají celočíselné rychlosti z množiny  $\hat{v}_{max}$ , kde  $v_{max} \in \mathbf{N}$  je parametr modelu. Druhým parametrem je tzv. decelerační pravděpodobnost  $p \in (0, 1)$ .

Výchozí konfigurace v čase  $t$  je updatována na novou konfiguraci v čase  $t + 1$  podle následujícího aktualizacího zobrazení:

1. akcelerace: rychlost všech vozidel je zvětšena o 1 se stropem rovným hodnotě  $v_{max}$

$$x_k \left( t + \frac{1}{4} \right) = x_k(t),$$

$$v_k \left( t + \frac{1}{4} \right) = \min \{ v_k(t) + 1, v_{max} \};$$

2. zpomalení zabraňující kolizi: pokud není před  $k$ -tým vozidlem dostatečný prostor, je rychlost odpovídajícím způsobem snížena

$$x_k\left(t + \frac{1}{2}\right) = x_k\left(t + \frac{1}{4}\right),$$

$$v_k\left(t + \frac{1}{2}\right) = \min\left\{v_k\left(t + \frac{1}{4}\right), r_k\left(t + \frac{1}{4}\right)\right\},$$

odstup vozidel je přitom

$$r_k\left(t + \frac{1}{4}\right) = x_{k-1}\left(t + \frac{1}{4}\right) - x_k\left(t + \frac{1}{4}\right) - 1;$$

3. náhodná decelerace: garantuje stochastickou povahu systému, s pravděpodobností  $p$  je rychlost snížena o jedna

$$x_k\left(t + \frac{3}{4}\right) = x_k\left(t + \frac{1}{2}\right),$$

$$v_k\left(t + \frac{3}{4}\right) = \begin{cases} v_k\left(t + \frac{1}{2}\right) & \dots \xi_k > p, \\ \max\{0, v_k\left(t + \frac{1}{2}\right) - 1\} & \dots \xi_k \leq p, \end{cases}$$

kde  $\xi_k := U(0, 1)$ ;

4. pohyb vozidel

$$x_k(t + 1) = x_k\left(t + \frac{3}{4}\right) + v_k\left(t + \frac{3}{4}\right),$$

$$v_k(t + 1) = v_k\left(t + \frac{3}{4}\right).$$

Počáteční podmínky: pro polohy:

1. náhodné polohy,
2. ekvidistantní řazení,
3. řazení ve frontě, tj. umístění vozidel v buňkách  $x_0, x_0 + 1, \dots, x_0 + N - 1$ ;

pro rychlosti:

1. náhodné rychlosti  $\sim U(\mathbb{N} \cup \langle 0, v_{max} \rangle) = U(\hat{v}max)$ ,
2. nulové rychlosti, tj. vozidla se rozjíždějí z klidu,
3. maximální rychlosti.

Updatovací procedury:

- paralelní datování - všechna vozidla mění lokace ve stejný čas;
- postupně sekvenční datování - nejprve se updatuje první vozidlo, v čase  $t + 1$  druhé, v čase  $t + 2$  třetí, atd.;
- dopředně sekvenční datování - nejprve se updatuje poslední vozidlo, v čase  $t + 1$  předposlední, atd.;
- náhodné datování - updatované vozidlo se volí náhodně.

Verze okrajových podmínek:

- otevřené okraje,
- uzavřený systém, tj. kruhová varianta modelu.

Prvotní a také nejčastější varianta modelu:

- náhodné inicializační lokace vozidel,
- nulové počáteční rychlosti,
- paralelní updatovací procedura,
- kruhová varianta modelu.

### 8.2.1 Makropopis

#### Hustota

Hustota v pevně zvolené buňce určená pro časový interval délky  $T$

$$\bar{\rho}_i^T = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+T} n_i(t),$$

kde

$$n_i(t) = \begin{cases} 0 & \dots i\text{-tá buňka je v čase } t \text{ prázdná,} \\ 1 & \dots i\text{-tá buňka je v čase } t \text{ obsazená.} \end{cases}$$

V uzavřeném systému musí platit

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \bar{\rho}_i^T = \rho = \frac{N}{L}$$

pro každé  $i \in \hat{L}$ .

#### Tok

Časově průměrovaný tok mezi  $i$ -tou a  $i + 1$  buňkou

$$\bar{J}^T = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+T} m_i(t),$$

kde

$$m_i(t) = \begin{cases} 1 & \dots \text{byl-li v čase } t \text{ detekován pohyb, mezi } i\text{-tou a } i + 1 \text{ buňkou,} \\ 0 & \dots \text{jinak.} \end{cases}$$

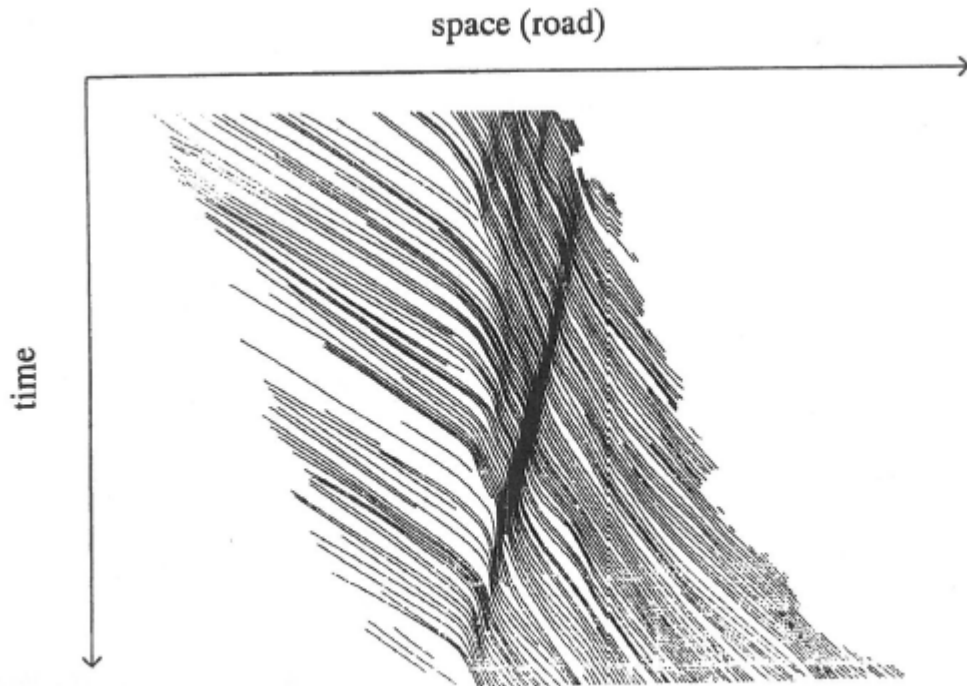


Fig.3. — Space-time-lines (trajectories) for cars from Aerial Photography (after [16]). Each line represents the movement of one vehicle in the space-time-domain.

Obrázek 8.41  
Časoprostorový diagram - NS model.

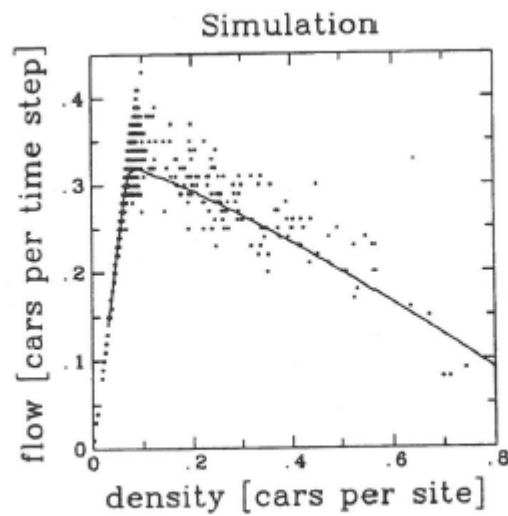


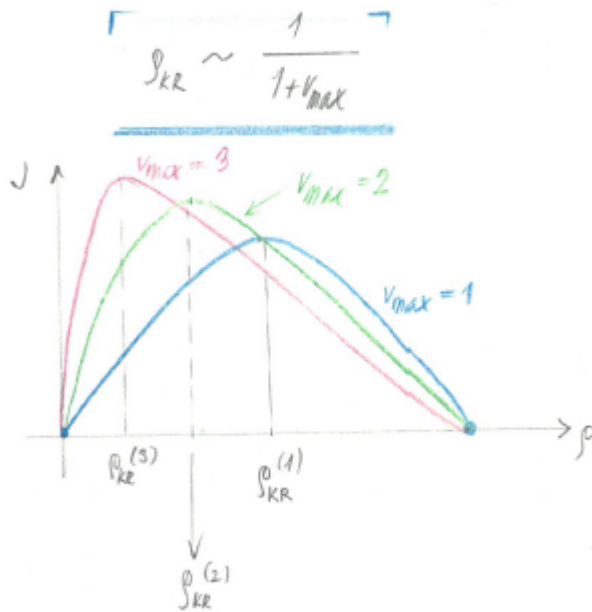
Fig.4. — Traffic flow  $q$  (in cars per time step) vs. density (in cars per site) from simulation results ( $L = 10^4$ ). Dots are averages over 100 time steps, the line represents averages over  $10^6$  time steps.

Obrázek 8.42  
Fundamentální diagram - NS model.

Analýza modelu:

- umí generovat kongesci,
- vykazuje kritickou hustotu,

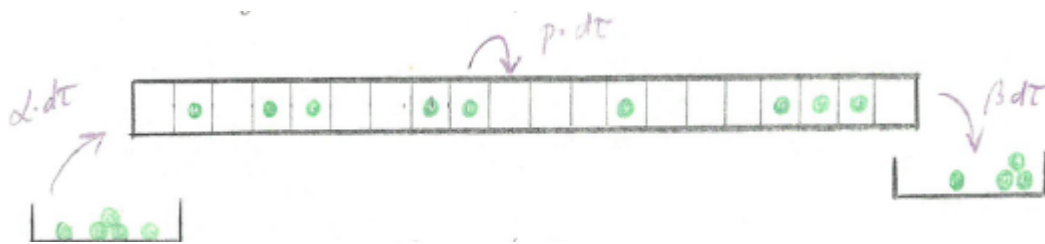
- rozděluje fundamentální diagram na dva subregiony,
- pro  $v_{max} = 1$  je model analyticky řešitelný.



Obrázek 8.43  
Fundamentální diagram - NS model, náčrt.

### 8.3 Model TASEP

Diskrétní model. Totálně asymetrický proces s jednoduchým vyloučením, jednoduché vyloučení: buňka může být obsazena pouze jednou částicí.



Obrázek 8.44  
Ilustrace k definici modelu TASEP.

Model spojité v čase, diskretní lokace, tři parametry:  $\alpha, \beta, p \in (0, 1)$ .  $\alpha dt$  značí pravděpodobnost, že nová částice vstoupí do první buňky mříže,  $\beta dt$  značí zase pravděpodobnost, že se částice vyskytující v poslední buňce opustí systém. Parametr  $p \in (0, 1)$  pouze škáluje vstupní parametry  $\alpha, \beta$ , proto bez újmy na obecnosti uvažujeme  $p = 1$ .

Konfigurace systému je popsána konfiguračním binárním funkcioálem  $\omega_\tau : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{0, 1\}$

$$\omega_\tau(i) = \begin{cases} 1 & \dots i\text{-tá buňka v konfiguraci } \tau \text{ je obsazená} \\ 0 & \dots i\text{-tá buňka v konfiguraci } \tau \text{ je prázdná.} \end{cases}$$



Pak konfigurací rozumíme množinu (vektor)

$$\tau = (\omega(1), \omega(2), \dots, \omega(N)) \in \{0, 1\}^N,$$

kde píšeme pro jednoduchost  $\omega := \omega_\tau$ . Množina vybraných konfigurací lze zapsat pak

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \{ & (\omega(1), \omega(2), \dots, \omega(N)) \in \{0, 1\}^N : \\ & \omega(1) = \omega(2) = \dots = \omega(n_1) \wedge \\ & \omega(n_1 + 1) = \dots = \omega(n_1 + m_1) = 0 \wedge \\ & \omega(n_1 + m_1 + \ell_1 + 1) = \dots = \omega(n_1 + m_1 + \ell_1 + n_2) = 1 \wedge \\ & \omega(n_1 + m_1 + \ell_1 + n_2 + 1) = \dots = \omega(n_1 + m_1 + \ell_1 + n_2 + m_2) = 0 \wedge \\ & \omega(n_1 + m_1 + \ell_1 + n_2 + m_2 + \ell_2 + 1) = \dots = \omega(n_1 + m_1 + \ell_1 + n_2 + m_2 + \ell_2 + n_3) = 1 \wedge \\ & \dots \} \end{aligned}$$

Bez újmy na obecnosti lze značit jako

$$\mathbb{X} = (n_1, m_1, \ell_1, n_2, m_2, \ell_2, \dots, n_q, m_q, \ell_q),$$

což je tzv. kódovaná množina vybraných konfigurací neboli kód.  $\mathcal{X}$  a  $\mathbb{X}$  jsou bijektivně zobrazitelné jedna na druhou, tj. kódová množina, resp. kód úvodní konfigurace je

$$\mathbb{X} = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 2, 3, 0, 1, 3, 0, 3, 1, 0).$$

Reprezentuje-li  $\mathcal{X}$  jednoprvkovou množinu konfigurací, tj. platí-li  $\ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_q = 0$ , pak  $\mathcal{X} = \mathbb{X}$ . Kód takové množiny může být zjednodušen na  $\mathbb{X} = (n_1, m_1, n_2, m_2, \dots, n_q, m_q)$ .

Označme  $\mathbb{P}_{ss}(\tau)$  pravděpodobnost ustáleného stavu konfigurace  $\tau$ . Co je ustálený stav?

- Pravděpodobnost všech konfigurací se dále nemění v čase.
- Tj. algoritmus probíhal dostatečně dlouho na to, aby eliminoval "výběrový trend" procesu (což chvíli trvá, než k ustálení dojde).

Alternativně lze značit též  $\mathbb{P}_{ss}(\mathcal{X})$ , resp.  $\mathbb{P}_{ss}(\mathbb{X})$ .

### Řešení modelu TASEP metodou MPA podle Bernarda Derridy

MPA zn. matrix product ansatz. Derridova formule:

$$\mathbb{P}_{ss}(\tau) = \frac{1}{Z_N} \frac{\langle w | \prod_{k=1}^N [\omega_k \mathbb{D} + (1 - \omega_k) \mathbb{E}] | v \rangle}{\langle w | v \rangle},$$

kde  $Z_N$  je partiční suma (normalizační konstanta),  $\mathbb{D}$  je čtvercová matice nekonečné dimenze asociovaná s obsazenou buňkou,  $\mathbb{E}$  je čtvercová matice nekonečné dimenze asociovaná s volnou buňkou. Bernard Derrida v roce 1992 dokázal, že MPA funguje, jsou-li splněny tři podmínky:

- $\mathbb{D} \mathbb{E} = \mathbb{D} + \mathbb{E}$ ;
- $\langle w | \mathbb{E} = \frac{1}{\alpha} \langle w |$ ;
- $\mathbb{D} | v \rangle = \frac{1}{\beta} | v \rangle$ .

Dále bez újmy na obecnosti lze vektory  $|v\rangle$  a  $\langle w|$  volit tak, aby  $\langle w|v\rangle = 1$ , výsledky se tím nezmění.

Při zápisu vektorů zde užíváme braketový formalismus, tj.  $|a\rangle$  značí sloupcový vektor,  $\langle a|$  zase řádkový.

Příklad:

Označme  $f_g = \langle w| \prod_{k=1}^N [\omega_k \mathbb{D} + (1 - \omega_k) \mathbb{E}] |v\rangle$  váhu konfigurace  $\tau$  a vypočteme ji pro  $\tau = (0, 1, 1, 0, 0, 1)$ . Postupujme

$$\begin{aligned} \langle w|\mathbb{E}\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{E}\mathbb{E}\mathbb{D}|v\rangle &= \frac{1}{\alpha} \langle w|\mathbb{D}^2\mathbb{E}^2|v\rangle \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} \langle w|\mathbb{D}(\mathbb{D} + \mathbb{E})\mathbb{E}|v\rangle = \frac{1}{\alpha\beta} \langle w|\mathbb{D}^2\mathbb{E}|v\rangle + \frac{1}{\alpha\beta} \langle w|\mathbb{D}\mathbb{E}^2|v\rangle = \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} \left[ \langle w|\mathbb{D}^2|v\rangle + 2 \langle w|\mathbb{D}\mathbb{E}|v\rangle + \langle w|\mathbb{E}^2|v\rangle \right] = \frac{\langle w|v\rangle}{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{\beta^2} + 2 \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \right] = V(\alpha, \beta) \langle w|v\rangle, \end{aligned}$$

odkud

$$Z_N = \sum_{\tau \in \{0,1\}^N} V_\tau(\alpha, \beta) \langle w|v\rangle.$$

**Věta 10.** Praviděpodobnost  $\mathbb{P}_{ss}(\tau)$  libovolné konfigurace je nezávislá na hodnotě skalárního součinu  $\langle w|v\rangle$ .

*Důkaz.* Plyne z předešlého příkladu, resp. z jeho zobecnění. □

**Věta 11.** Pro libovolnou konfiguraci  $\tau \in \{0, 1\}^N$  lze součin  $\prod_{k=1}^N [\omega_k \mathbb{D} + (1 - \omega_k) \mathbb{E}]$  převést do tvaru

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_{mn} \mathbb{E}^m \mathbb{D}^n,$$

kde  $a_{mn} \in \mathbb{N}_0$ .

*Důkaz.* Důkaz provedeme indukcí podle velikosti systému. Pro  $N = 1$  je tvrzení triviální. Předpokládejme, že tvrzení platí pro  $N = L$  a dokažme, že ho lze rozšířit na  $N = L + 1$ .

1. Nejprve pro případ, kdy v dodaném chlívěčku byla částice

$$\left( \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L a_{mn} \mathbb{E}^m \mathbb{D}^n \right) \mathbb{D} = \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L a_{mn} \mathbb{E}^m \mathbb{D}^{n+1} = \sum_{n=1}^{L+1} \sum_{m=1}^{L+1} \tilde{a}_{mn} \mathbb{E}^m \mathbb{D}^n,$$

2. posléze pokud v dodaném chlívěčku částice nebude, pak

$$\left( \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L a_{mn} \mathbb{E}^m \mathbb{D}^n \right) \mathbb{E} = \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L a_{mn} \mathbb{E}^m \mathbb{D}^n \mathbb{E} = \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L a_{mn} \mathbb{E}^m \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{D}^k + \mathbb{E} \right) = \sum_{n=1}^{L+1} \sum_{m=1}^{L+1} \tilde{a}_{mn} \mathbb{E}^m \mathbb{D}^n,$$

kde jsme využili následujícího

$$\mathbb{D}^n \mathbb{E} = \mathbb{D}^{n-1} (\mathbb{D} + \mathbb{E}) = \mathbb{D}^n + \mathbb{D}^{n-1} \mathbb{E} = \mathbb{D}^n + \mathbb{D}^{n-2} (\mathbb{D} + \mathbb{E}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{D}^k + \mathbb{E}.$$

□

**Lemma 1.** V modelu TASEP pro  $N$  buněk platí

$$\sum_{\omega_1=0}^1 \sum_{\omega_2=0}^1 \cdots \sum_{\omega_N=0}^1 \prod_{k=1}^N [\omega_k \mathbb{D} + (1 - \omega_k) \mathbb{E}] = (\mathbb{D} \mathbb{E})^N.$$

*Důkaz.* Opět matematickou indukcí podle velikosti souboru. Nejprve pro  $N = 1$

$$\sum_{\omega=0}^1 [\omega \mathbb{D} + (1 - \omega) \mathbb{E}] = \mathbb{E} + \mathbb{D} = \mathbb{D} \mathbb{E}.$$

Pro  $N = 2$

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_1=0}^1 \sum_{\omega_2=0}^1 [\omega_1 \mathbb{D} + (1 - \omega_1) \mathbb{E}] [\omega_2 \mathbb{D} + (1 - \omega_2) \mathbb{E}] &= \sum_{\omega_1=0}^1 [\omega_1 \mathbb{D} + (1 - \omega_1) \mathbb{E}] (\mathbb{D} + \mathbb{E}) = \\ &= \mathbb{E} (+\mathbb{E}) + \mathbb{D} (\mathbb{D} + \mathbb{E}) = (\mathbb{D} \mathbb{E})^2. \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro  $N = L$  a dokažme, že lze přenést na případ  $N = L + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_1=0}^1 \cdots \sum_{\omega_{L+1}=0}^1 \prod_{k=1}^{L+1} [\omega_k \mathbb{D} + (1 - \omega_k) \mathbb{E}] &= \sum_{\omega_1=0}^1 \cdots \sum_{\omega_L=0}^1 \left( \sum_{\omega_{L+1}=0}^1 [\omega_{L+1} \mathbb{D} + (1 - \omega_{L+1}) \mathbb{E}] \cdot \prod_{k=1}^L [\omega_k \mathbb{D} + (1 - \omega_k) \mathbb{E}] \right) = \\ &= (\mathbb{D} + \mathbb{E}) \sum_{\omega_1=0}^1 \cdots \sum_{\omega_L=0}^1 \prod_{k=1}^L [\omega_k \mathbb{D} + (1 - \omega_k) \mathbb{E}] = (\mathbb{D} + \mathbb{E}) (\mathbb{D} \mathbb{E})^L = (\mathbb{D} \mathbb{E})^{L+1}. \end{aligned}$$

□

**Věta 12.** Partiční suma v MPA lze vyjádřit ve tvaru

$$Z_N = \langle w | (\mathbb{D} \mathbb{E})^N | v \rangle.$$

*Důkaz.* Využijeme předchozí lemma. Upravujeme

$$Z_N = \sum_{\omega_1=0}^1 \cdots \sum_{\omega_N=0}^1 \langle w | \prod_{k=1}^N [\omega_k \mathbb{D} + (1 - \omega_k) \mathbb{E}] | v \rangle = \langle w | \sum_{\omega_1=0}^1 \cdots \sum_{\omega_N=0}^1 \prod_{k=1}^N [\omega_k \mathbb{D} + (1 - \omega_k) \mathbb{E}] | v \rangle = \langle w | (\mathbb{D} \mathbb{E})^N | v \rangle.$$

□

Asymptotická podoba  $\langle w | (\mathbb{D} \mathbb{E})^N | v \rangle$  pro velká  $N$ :

1. pro  $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

$$Z_N \approx \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\pi} (\beta - \alpha)} \left[ \frac{1}{(2\alpha - 1)^2} - \frac{1}{(2\beta - 1)^2} \right] \frac{4^N}{N^{3/2}};$$

2. pro  $\frac{1}{2} < \alpha = \beta$

$$Z_N \approx \frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi} (2\alpha - 1)^3} \frac{4^{N+1}}{N^{3/2}};$$

3. pro  $\alpha = \frac{1}{2} < \beta$

$$Z_N \approx \frac{2\beta}{\sqrt{\pi} (2\beta - 1)} \frac{4^N}{N^{1/2}};$$

4. pro  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$Z_N = 4^N;$$

5. pro  $\alpha < \frac{1}{2}$  a  $\alpha < \beta$

$$Z_N \approx \frac{\beta(1 - 2\alpha)}{(\beta - \alpha)(1 - \alpha)} \frac{1}{\alpha^N (1 - \alpha)^N};$$

6. pro  $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$

$$Z_N \approx \frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} \frac{N}{\alpha^N (1-\alpha)^N}.$$

These expressions allow one to determine the following asymptotic forms of  $\langle W|C^N|V \rangle$  for large  $N$ . Note that since (47) is symmetric in  $\alpha$  and  $\beta$ , the cases where  $\beta < \alpha$  can be obtained from those where  $\alpha < \beta$  by interchanging  $\alpha$  and  $\beta$ .

(a) For  $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$  ✓

$$\langle W|C^N|V \rangle \simeq \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\pi(\beta-\alpha)}} \left[ \frac{1}{(2\alpha-1)^2} - \frac{1}{(2\beta-1)^2} \right] \frac{4^N}{N^{3/2}}. \quad (51)$$

(a') For  $\frac{1}{2} < \alpha = \beta$  ✓

$$\langle W|C^N|V \rangle \simeq \frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi(2\alpha-1)^3}} \frac{4^{N+1}}{N^{3/2}}. \quad (52)$$

(b) For  $\alpha = \frac{1}{2} < \beta$  |

$$\langle W|C^N|V \rangle \simeq \frac{2\beta}{\sqrt{\pi(2\beta-1)}} \frac{4^N}{N^{1/2}}. \quad (53)$$

(b') For  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  ●

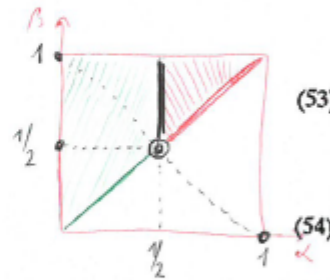
$$\langle W|C^N|V \rangle = 4^N.$$

(c) For  $\alpha < \frac{1}{2}$  and  $\alpha < \beta$  ▷

$$\langle W|C^N|V \rangle \simeq \frac{\beta(1-2\alpha)}{(\beta-\alpha)(1-\alpha)} \frac{1}{\alpha^N (1-\alpha)^N}. \quad (55)$$

(d) For  $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$  ✓

$$\langle W|C^N|V \rangle \simeq \frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} \frac{N}{\alpha^N (1-\alpha)^N}. \quad (56)$$



(The case (b')  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  is in fact trivial, as mentioned above, since  $\alpha + \beta = 1$  and  $C = (1/\alpha) + (1/\beta)$  is a number.)

Obrázek 8.45

Asymptotické chování partiční sumy pro velká  $N$ .

### Vlastnosti Derridových matic

Mohou být matice  $\mathbb{D}, \mathbb{E}$  komutativní? Jsou komutativní na linii komutativity

$$\begin{aligned} \langle w|\mathbb{E}\mathbb{D}|v \rangle &= \langle w|\mathbb{D}|v \rangle + \langle w|\mathbb{E}|v \rangle \\ \mathbb{E}\mathbb{D} = \mathbb{D} + \mathbb{E} &\Rightarrow \langle w|\frac{1}{\alpha\beta}|v \rangle = \langle w|\frac{1}{\beta}|v \rangle + \langle w|\frac{1}{\alpha}|v \rangle \\ &\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \\ &\alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

Mohou být matice  $\mathbb{D}, \mathbb{E}$  jednorozměrné? Ano, na linii komutativity

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = e, \mathbb{D} = d &\Rightarrow ed = d + e \wedge e = \frac{1}{\alpha} \wedge d = \frac{1}{\beta} \\ &\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

**Věta 13.** *Nechť  $\mathbb{D}, \mathbb{E}$  nekomutují, pak jsou tyto matice nekonečně dimenzionální.*

*Důkaz.* Pro spor předpokládejme, že  $\mathbb{D}, \mathbb{E}$  jsou konečně dimenzionální.

**Lemma 2.** *Nemůže existovat žádný nenulový vektor  $|v\rangle$  tak, aby  $\mathbb{E}|v\rangle = |v\rangle$ .*

*Důkaz.* Kdyby ano, pak

$$\mathbb{D}|v\rangle = \mathbb{D}\mathbb{E}|v\rangle = (\mathbb{D} + \mathbb{E})|v\rangle = \mathbb{D}|v\rangle + \mathbb{E}|v\rangle = \mathbb{D}|v\rangle + |v\rangle,$$

odkud pak  $|v\rangle = |0\rangle$ . □

Z lemma pro každé  $|v\rangle \neq |0\rangle$  platí  $\mathbb{E}|v\rangle \neq |v\rangle$ , pak  $(\mathbb{E} - \mathbb{I})|v\rangle \neq 0$  čili  $\det(\mathbb{E} - \mathbb{I}) \neq 0$ , tj. matice  $\mathbb{E} - \mathbb{I}$  je invertibilní, tj. existuje k ní inverzní matice  $(\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1}$  tak, že

$$(\mathbb{E} - \mathbb{I})(\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1} = (\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1}(\mathbb{E} - \mathbb{I}) = \mathbb{I}.$$

Využijeme rovnost

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\mathbb{E} &= \mathbb{D} + \mathbb{E} \\ \mathbb{D}\mathbb{E} - \mathbb{D} &= \mathbb{E} \\ \mathbb{D}(\mathbb{E} - \mathbb{I}) &= \mathbb{E} \\ \mathbb{D} &= \mathbb{E}(\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1}. \end{aligned}$$

Dále získáme spor

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\mathbb{E} - \mathbb{E}\mathbb{D} &= \mathbb{E}(\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1}\mathbb{E} = \mathbb{E}\mathbb{E}(\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1} = \mathbb{E}\left[(\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1}\mathbb{E} - \mathbb{E}(\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1} + (\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1} - (\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1}(\mathbb{E} - \mathbb{I}) - (\mathbb{E} - \mathbb{I})(\mathbb{E} - \mathbb{I})^{-1}\right] = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

□

### Transformace MPA ansatzu

$$\mathbb{P}_{ss}(\mathbb{X}) = \frac{1}{Z_N} \frac{\langle w | \mathbb{D}^{n_1} \mathbb{E}^{m_1} (\mathbb{D} + \mathbb{E})^{\ell_1} \mathbb{D}^{n_2} \mathbb{E}^{m_2} (\mathbb{D} + \mathbb{E})^{\ell_2} \dots |v\rangle}{\langle w | v \rangle}$$

Je-li  $\mathbb{X}$  množina všech konfigurací, pak  $\mathbb{X} = (0, 0, N)$  a skutečně  $\mathbb{P}_{ss}(\mathbb{X}) = 1$ . Obecně jsou ale  $\mathbb{D}, \mathbb{E}$  nekomutující a nekonečně dimenzionální.

*Důkaz.*

$$\mathbb{P}_{ss}(0, 0, N) = \frac{1}{Z_N} \frac{\langle w | \mathbb{D}^0 \mathbb{E}^0 (\mathbb{D} + \mathbb{E})^N |v\rangle}{\langle w | v \rangle} \stackrel{\langle w | v \rangle = 1}{=} 1$$

□

**Lemma 3.** *Jsou-li  $\alpha, \beta \neq 0$  a  $\alpha + \beta = 1$ , pak*

$$\mathbb{P}_{ss}(\mathcal{X}) = \alpha^{\sum_{i=1}^N n_i} \beta^{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

*Důkaz.* Za daných podmínek jistě platí, že  $\mathbb{E} = \frac{1}{\alpha}$  a  $\mathbb{D} = \frac{1}{\beta}$ , pak

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{ss}(\mathcal{X}) &= \frac{\langle w | \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n_1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m_1} \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{\ell_1} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n_2} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m_2} \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{\ell_2} \dots |v\rangle}{\langle w | \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^N |v\rangle} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n_1 + \ell_1 + n_2 + \ell_2 + \dots - N} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m_1 + \ell_1 + m_2 + \ell_2 + \dots - N} = \\ &= \alpha^{\sum_{i=1}^N n_i} \beta^{\sum_{i=1}^N m_i}, \end{aligned}$$

tj.  $\alpha$  mocníme na počet všech povinně obsazených buněk a  $\beta$  naopak na počet všech povinně volných buněk. □

**Fundamentální závislost modelu TASEP**

Hustota = střední obsazenost  $k$ -té buňky, tj.

$$\rho_k = \mathbb{E}(\omega_k) = \sum_{\forall \tau} \omega_k \mathbb{P}_{ss}(\tau) = \sum_{\forall \tau: \omega_k=1} \mathbb{P}_{ss}(\tau) = \mathbb{P}_{ss}(0, 0, k-1, 1, 0, N-k),$$

tedy

$$\rho_k = \frac{\langle w | (\mathbb{D} + \mathbb{E})^{k-1} \mathbb{D} (\mathbb{D} + \mathbb{E})^{N-k} | v \rangle}{\langle w | (\mathbb{D} + \mathbb{E})^N | v \rangle}.$$

Hustota na linii komutativity pak vychází jako

$$\rho_k = \alpha$$

pro všechna  $k \in \hat{N}$ , nezávisí tedy na pořadí buňky, kde se hustota zkoumá.

Tok = počet částic, které projdou  $k$ -tou buňkou za jednotku času, tj.

$$J_k = \frac{1}{\mathbb{E}(\Delta\tau)_k} = \mathbb{P}_{ss}(k\text{-tá částice může přeskočit}) = \frac{\langle w | (\mathbb{D} + \mathbb{E})^{k-1} \mathbb{D} \mathbb{E} (\mathbb{D} + \mathbb{E})^{N-k-1} | v \rangle}{\langle w | (\mathbb{D} + \mathbb{E})^N | v \rangle} = \frac{Z_{N-1}}{Z_N}.$$

Tok v komutativní verzi modelu je pak

$$J_k = \alpha \beta$$

opět pro všechna  $k \in \hat{N}$ , tj. opět nezávisí na volbě zkoumané buňky.

Fundamentální diagram na linii komutativity, tj.  $\alpha + \beta = 1$ :

$$J = \alpha \beta = \alpha(1 - \alpha) = \rho(1 - \rho).$$

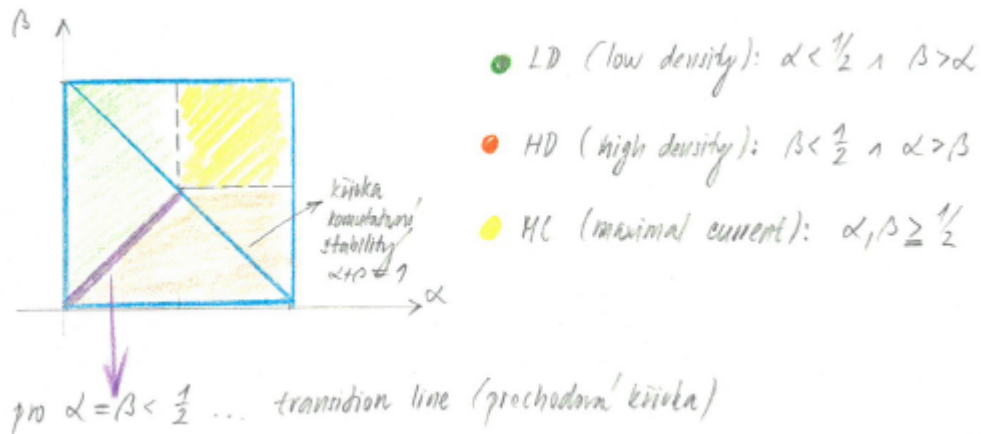


**Obrázek 8.46**

Fundamentální diagram modelu TASEP.

**Fáze modelu TASEP**

LD(low density):  $\alpha < \frac{1}{2} \wedge \beta > \alpha$ , HD (high density):  $\beta < \frac{1}{2} \wedge \alpha < \beta$ , MC(maximal current):  $\alpha, \beta \geq \frac{1}{2}$ , transition line (přechodová křivka): systém přechází ze stavu s nízkou hustotou do stavu s vysokou hustotou:  $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$ .



**Obrázek 8.47**  
Fáze modelu TASEP.

Hustota: (bulk behavior = dostatečně vzdálené od hranic)

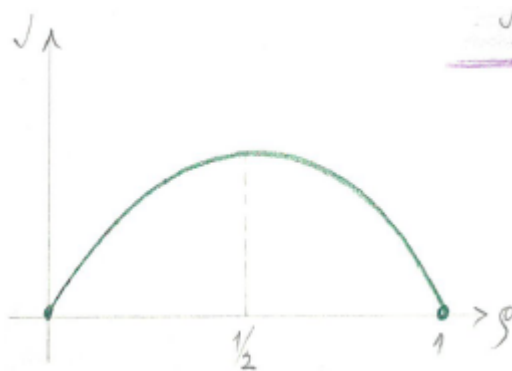
$$\rho(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \dots \alpha \geq \frac{1}{2} \wedge \beta \geq \frac{1}{2} \quad \text{MC,} \\ \alpha & \dots \alpha < \frac{1}{2} \wedge \beta > \alpha \quad \text{LD,} \\ 1 - \beta & \dots \beta < \frac{1}{2} \wedge \beta < \alpha \quad \text{HD,} \\ \alpha & \dots \alpha + \beta = 1. \end{cases}$$

Tok v bulk oblasti:

$$J(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \dots \alpha \geq \frac{1}{2} \wedge \beta \geq \frac{1}{2} \quad \text{MC,} \\ \alpha(1 - \alpha) & \dots \alpha < \frac{1}{2} \wedge \beta > \alpha \quad \text{LD,} \\ \beta(1 - \beta) & \dots \beta < \frac{1}{2} \wedge \beta < \alpha \quad \text{HD,} \\ \alpha\beta & \dots \alpha + \beta = 1. \end{cases}$$

Fundamentální závislost v bulk oblasti:

$$J = \rho(1 - \rho)$$



**Obrázek 8.48**  
Fundamentální závislost v bulk oblasti modelu TASEP.





# Literatura