01MCS Matematika částicových systémů

Martin Kovanda
dle přednášky doc. Mgr. Milana Krbálka, Ph.D.

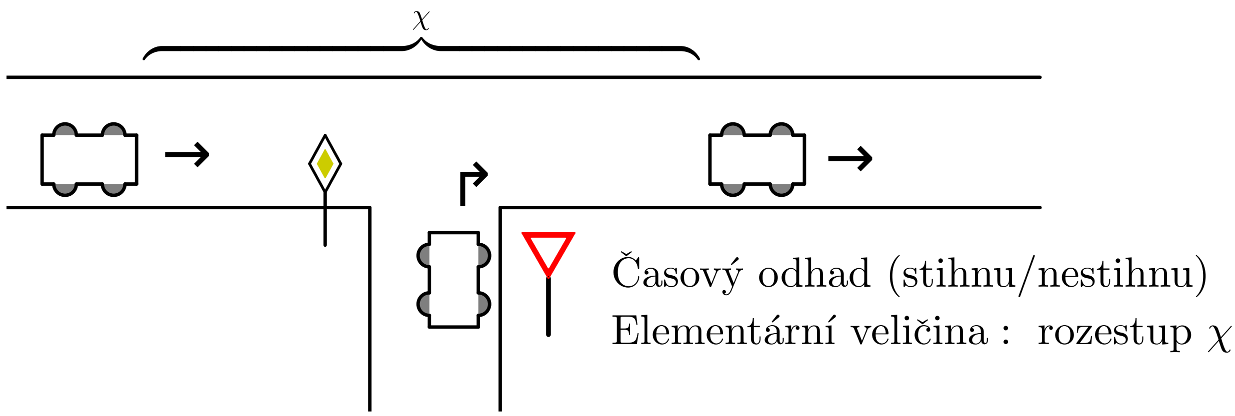
22. prosince 2019

Obsah

Předmluva

Materiál byl sestaven z přednášek doc. Mgr. Milana Krbálka, Ph.D., které proběhly v zimním semestru akademického roku 2019/2020 na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze.

Tento učební text je určen posluchačům 3. ročníku základního studia navštěvujícím kurs 01MCS *Matematika částicových systémů*, který je zařazen mezi předměty oboru AMSM.



1 Úvod

Předpokládáme vždy měřitelné funkce.

Definice 1.1. Značení:

1. $\mathcal{C}(G)$ - funkce spojité na množině G
2. $\mathscr{PC}(G)$ - funkce po částech spojité: nespojitosti konečné délky, tzn.
   μ(body nespojitosti) = 0, konečně mnoho bodů nespojitosti, spojistost zleva
3. $f(x) \in \mathscr{L}(A, \mu) \Leftrightarrow \exists \int\limits_A f(x) \mathrm{d}\mu(x) \in \mathbb{R}$
4. $f(x) \in \mathscr{L}^*(A, \mu) \Leftrightarrow \exists \int\limits_A f(x) \mathrm{d}\mu(x)$

Poznámka 1.2.

$$f(x) \in \mathscr{PC}([a, b]) \wedge f(x) \sim 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Definice 1.3. O funkci $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prohlásíme, že je **hustotou** a označíme $f(x) \in \mathscr{H}$, pokud platí, že

1. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
2. $Ran(f) \subset \mathbb{R}_0^+$
3. $f(x) \in \mathscr{PC}(\mathbb{R})$
4. $f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

Definice 1.4. Nechť $f(x) \in \mathscr{H}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Pokud $x^n f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, pak číslo $\mu_n := \int\limits_{\mathbb{R}} x^n f(x) \mathrm{d}x$ nazveme **n-tým (necentrálním) momentem hustoty** $f(x)$.

Definice 1.5. Nechť $f(x) \in \mathscr{H}$ a $x f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$. Nechť μ_1 je první moment $f(x)$. Pokud pro $n \in \mathbb{N}$ platí, že $(x - \mu_1)^n f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, pak číslo $\nu_n := \int\limits_{\mathbb{R}} (x - \mu_1)^n f(x) \mathrm{d}x$ nazveme **n-tým centrálním momentem**.

Věta 1.6. *Pokud existují všechny níže uvedené momenty, pak platí:*

$$\nu_n := \int\limits_{\mathbb{R}} (x - \mu_1)^n f(x) \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-1)^{n-k} \mu_1^{n-k} f(x) \mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mu_1^{n-k} \int\limits_{\mathbb{R}} x^k f(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \mu_1^{n-k} \mu_k$$

Věta 1.7. *Pokud $f(x)$ je normovaná hustota ($\mu_0 = 1$), pak platí*

$$\nu_2 = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} \mu_1^{2-k} \mu_k = \mu_1^2 - 2\mu_1^2 + \mu_2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

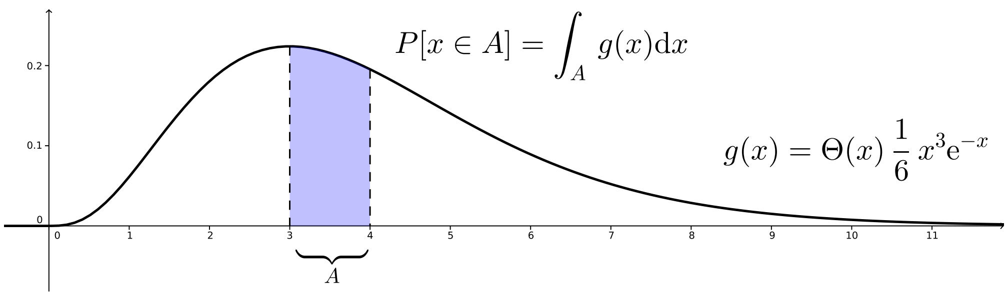
Poznámka 1.8.

$$\Rightarrow D(\chi) = E(\chi^2) - E^2(\chi)$$

Definice 1.9. Hustotou pravděpodobnosti (na přednáškách zkráceno na "hupsti") nazveme funkci $g(x)$, pro kterou platí:

1. $Dom(g) = \mathbb{R}$
2. $Ran(g) \subset \mathbb{R}_0^+$
3. $g(x) \in \mathscr{PC}(\mathbb{R})$
4. $\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}x = 1$
5. (MCS) $x < 0 \Rightarrow g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(x)g(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad supp(g) \subset \mathbb{R}^+$

Poznámka 1.10. Spojitou náhodnou a nezápornou veličinu χ nazveme **rozestupem**.



Obrázek 1.1: Hustota pravděpodobnosti (Erlangovo rozdělení pro $A = \frac{1}{6},\ n = 4,\ \lambda = 1$)

Definice 1.11. μ_0 nazveme **momentovou normou** (nultý moment).

Věta 1.12. *Pro hustotu g platí, že*

1. $\mu_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$
2. $\mu_0 = 1 \Rightarrow g(x)$ *nazveme hustotou pravděpodobnosti, označíme* $g(x) \in \mathscr{H}_1$ ($\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}$) *a prohlásíme o ni, že je normovaná.*
3. $\mu_0 = \mu_1 = 1 \Rightarrow g(x)$ *je škálovaná hustota pravděpodobnosti a* $g(x) \in \mathscr{H}_{11}$

2 Rozdělení

1. Rovnoměrné rozdělení $(-\infty < a < b < +\infty)$, $\quad g(x) \in \mathscr{H}$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, a] \cup (b, +\infty) \\ \alpha & x \in (a, b] \end{cases}$$

2. Normální (Gaussovo) rozdělení, $g(x) \in \mathscr{H}$

$$g(x) = A\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, A > 0)$$

3. Exponenciální rozdělení, $g(x) \in \mathscr{H}$

$$g(x) = \Theta(x)A\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad (A \geqslant 0, \lambda > 0)$$

4. Erlangovo rozdělení (speciální případ Gamma rozdělení), $g(x) \in \mathscr{H}$

$$g(x) = \Theta(x)Ax^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad (A \geqslant 0, n \in \mathbb{N}, \lambda > 0)$$

5. Gamma rozdělení

$$g(x) = \Theta(x)Ax^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad (A \geqslant 0, \alpha > 0, \lambda > 0)$$

6. Centrované exponenciální rozdělení

$$g(x) = \Theta(x-c)A\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad (c \in \mathbb{R}, A > 0, \lambda > 0)$$

7. GIG rozdělení (zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení)

$$g(x) = \Theta(x)Ax^{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{x}}\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad (A > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda > 0)$$

Věta 2.1. $g(x) \in \mathscr{H} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Definice 2.2. Nechť jsou dány dvě $g(x), f(x) \in \mathscr{H}$. Existují-li čísla $a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$ tak, že $g(x) = |a| f(ax+b)$, pak řekneme, že hustoty $f(x), g(x)$ jsou **afinně sdružené**.

Věta 2.3. *Afinně sdružené hustoty pravděpodobnosti $f(x), g(x)$ mají totožné nulté momenty (momentové normy).*

Důkaz.

$$\mu_0(g) := \int\limits_R x^0 g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_R |a| f(ax+b)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = ax+b \\ \mathrm{d}y = a\mathrm{d}x \end{array} \right| = \underbrace{|a| \int\limits_R f(y)\frac{\mathrm{d}y}{|a|}}_{\text{pokud } a<0 \text{, pak se prohodí meze}} = \int\limits_R f(y)\mathrm{d}y = \mu_0(f)$$

$\square$

Poznámka 2.4.

$$\mu_1(g) = \int_R x g(x)\mathrm{d}x = \int_R x|a|f(ax+b)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = ax + b \\ \mathrm{d}y = a\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int_R \frac{y-b}{|a|}|a|\frac{1}{a}f(y)\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{a}\int_R y f(y)\mathrm{d}y - \frac{b}{a}\int_R f(y)\mathrm{d}y = \frac{\mu_1(f)}{a} - \frac{b}{a}\mu_0(f),$$

kde $a \neq 0$.

3 Konvoluce nad třídou $\mathscr{H}$

Označme $\mathcal{Z}_{13}$ jako náhodnou veličinu (vzdálenost 1. a 3. částice),

$$\mathcal{Z}_{13} \sim f(z) \Rightarrow f(z) = \text{i.d. } (g * g)(z),$$

kde $(g * h)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}} g(s)h(x-s)\mathrm{d}s$ je konvolucí.

Věta 3.1. *Mějme $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$. Pak integrál $\int\limits_{\mathbb{R}} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s$ existuje pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ a funkce $h(x) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s$ po dodefinování nulou v bodech, kde uvedený integrál neexistuje, patří do $\mathscr{H}$.*

Důkaz. $H(x,s) = g(s)f(x-s) \geqslant 0 \Rightarrow H(x,s) \in \mathscr{L}^*(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ jsou splněny předpoklady Fubiniho věty

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} H(x,s)\mathrm{d}(x,s) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} H(x,s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x \wedge \int\limits_{\mathbb{R}} H(x,s)\mathrm{d}s \text{ existuje pro s.v. } x \in \mathbb{R}$$

1. $Dom(h) = \mathbb{R}$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) \geqslant 0) \Rightarrow Ran(h) \subset \mathbb{R}_0^+$
3. $h(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \overset{F.V.}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} f(s) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} g(x-s)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} y = x - s \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(s) \underbrace{\left(\int\limits_{\mathbb{R}} g(y)\mathrm{d}y \right)}_{g(x)\in\mathscr{H} \Rightarrow \mu_0(g)\in\mathbb{R}} \mathrm{d}s = \mu_0(g)\mu_0(f) \in \mathbb{R}$$

4. $h(x) \in \mathscr{P}\mathscr{C}(\mathbb{R})$

□

Definice 3.2. Mějme $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$. Pak funkci $h(x)$ z předešlé věty nazveme konvolucí funkcí $f(x), g(x)$ a značíme ji

$$h(x) = (f * g)(x)$$

Věta 3.3 (O vlastnostech konvoluce)**.** *Konvoluce je komutativní, bilineární a asociativní operace nad $\mathscr{H}$.*

Důkaz. $f(x), g(x), h(x) \in \mathscr{H}, \alpha \in \mathbb{R}$

1.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} y = x - s \\ \mathrm{d}y = -\mathrm{d}s \end{array} \right| \overset{\text{otočení mezí}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = (g * f)(x)$$

2.

$$\begin{aligned} ((\alpha f + h) * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f(s) + h(s))g(x-s)\mathrm{d}s = \alpha \int_{\mathbb{R}} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}} h(s)g(x-s)\mathrm{d}s = \\ &= \alpha(f * g)(x) + (h * g)(x) \end{aligned}$$

(linearita v pravém argumentu analogicky)

3.

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(s)h(x-s)\mathrm{d}s \overset{\text{F.V.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha)g(s-\alpha)h(x-s)\mathrm{d}(\alpha, s) \\ f * (g * h) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-z)(g * h)(z)dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(\beta)h(z-\beta)\mathrm{d}(\beta, z) = \\ &= \left| \begin{array}{c} x - z = \alpha \\ s - \alpha = \beta \end{array} \right| = \int_{\mathbb{R}} f(\alpha)g(s-\alpha)h(x-s)\mathrm{d}(\alpha, s) \end{aligned}$$

□

Věta 3.4 (O zjednodušení definičního předpisu pro konvoluci pro funkce s pozitivním nosičem)**.** *Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$, kde* $\operatorname{supp}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$ *a* $\operatorname{supp}(g) \subset \mathbb{R}_0^+$*. Pak platí*

$$(f * g)(x) = \Theta(x) \int_0^x f(s)g(x-s)\mathrm{d}s,$$

tzn. $\operatorname{supp}(f * g) \subset \mathbb{R}_0^+$

Důkaz.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \Theta(s)f(s)\Theta(x-s)g(x-s)\mathrm{d}s = \begin{cases} \int_0^x f(s)g(x-s)\mathrm{d}s, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

což se dá zapsat jako

$$(f * g)(x) = \Theta(x) \int_0^x f(s)g(x-s)\mathrm{d}s$$

□

Věta 3.5. *Vztahy mezi momenty*

$$\mu_0(f*g) = \mu_0(f)\mu_0(g) \Rightarrow [f(x), g(x) \in \mathscr{H}_1 \Rightarrow (f*g)(x) \in \mathscr{H}_1]$$

$$\mu_1(f*g) = \int_{\mathbb{R}} x(f*g)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x \int_{\mathbb{R}} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \overset{F.V.}{=} \int_{\mathbb{R}} f(s)\left(\int_{\mathbb{R}} xg(x-s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s =$$

$$= \left|\begin{array}{c} x-s=y \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array}\right| = \int_{\mathbb{R}} f(s)\left(\int_{\mathbb{R}}(y+s)g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(s)\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} yg(y)\mathrm{d}y\right)}_{\mu_1(g)\ \textit{musí existovat}}\mathrm{d}x +$$

$$+\int_{\mathbb{R}} sf(s)\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\mathrm{d}y\right)}_{\mu_0(g)}\mathrm{d}x = \mu_1(g)\mu_0(f) + \mu_0(g)\mu_1(f)$$

Poznámka 3.6.

$$f(x), g(x) \in \mathscr{H}_1 \Rightarrow \mu_1(f*g) = \mu_1(f) + \mu_1(g)$$

Věta 3.7 (O posunutí v konvoluci)**.** *Mějme $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

$$f(x-\alpha)*g(x) = f(x)*g(x-\alpha) = (f*g)(x-\alpha)$$

Důkaz.

$$f(x-\alpha)*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(s-\alpha)g(x-s)\mathrm{d}s = \left|\begin{array}{c} y = s-\alpha \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}s \end{array}\right| = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y-\alpha)\mathrm{d}y = (f*g)(x-\alpha)$$

□

Věta 3.8 (O derivaci konvoluce)**.** *Mějme $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$, kde $f'(x), g'(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ jsou omezené na $\mathbb{R}$. Pak platí*

$$f'(x)*g(x) = f(x)*g'(x) = (f*g)'(x)$$

Důkaz.

$$(f*g)'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\mathbb{R}} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s \overset{\text{záměna}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(s)g'(x-s)\mathrm{d}s = (f*g')(x)$$

Záměna je možná, protože $|f(s)g'(x-s)| \leqslant Kf(s) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$. Dále potom

$$(f*g)'(x) = (g*f)'(x) = (g*f')(x) = (f'*g)(x).$$

□

4 Třída balancovaných hustot

Definice 4.1. Řekneme, že $g \in \mathscr{B}$, pokud g splňuje axiomy pro příslušnost do $\mathscr{B}$:

1. $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$
2. $\mathrm{Ran}(g) \subset \mathbb{R}_0^+$
3. $g(x) \in \mathscr{PC}(\mathbb{R})$
4. $g(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$
5. $\mathrm{supp}(g) \subset \mathbb{R}_0^+ \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = \Theta(x)g(x)$
6. (balanční axiom) Existuje $\omega \in \mathbb{R}^+$ tak, že platí vztahy

$$\alpha > \omega \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x)\mathrm{e}^{\alpha x} = +\infty$$
$$\alpha < \omega \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x)\mathrm{e}^{\alpha x} = 0.$$

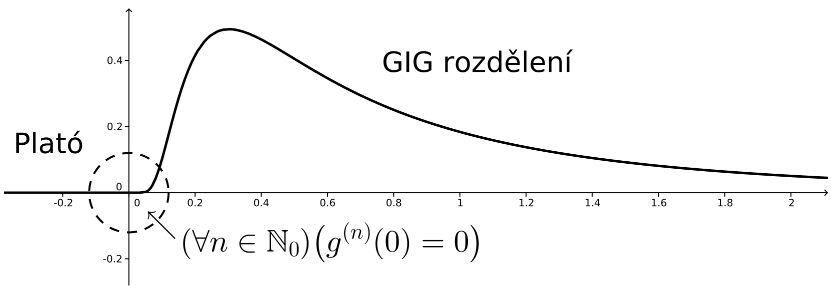
Definujeme dále **balanční index** vztahem $\mathrm{inb}(g) := \omega$.

Oproti definici hustoty se tedy liší v bodech 5. a 6.

Věta 4.2 (nutná podmínka pro příslušnost do $\mathscr{B}$)**.**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

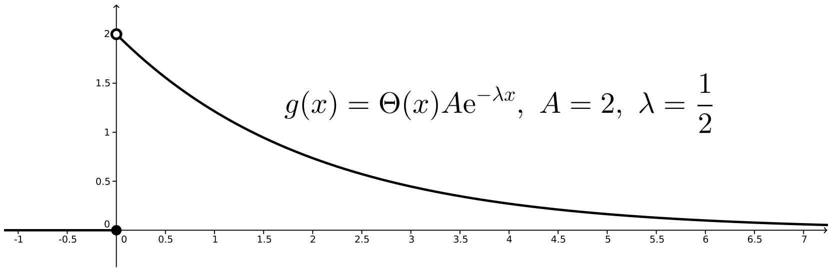
POZNÁMKA 4.3. Ve třídě $\mathscr{B}$ existuje ještě podtřída, příslušné funkce mají tzv. plató v $x = 0$.



Obrázek 4.1: GIG rozdělení - příklad rozdělení s plató

Definice 4.4. Poissonovským částicovým systémem nazveme systém, kde

- jsou částice bez vzájemné interakce (bezdosahový částicový systém)
- $g(x) = \Theta(x)A\mathrm{e}^{-\lambda x}$ pro $A > 0, \lambda > 0$ a po normalizaci přechází na exponenciální rozdělení, tedy $g(x) = \Theta(x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$, kde $\lambda > 0$.



Obrázek 4.2: Poissonovský částicový systém

Poznámka 4.5. Poissonovský částicový systém je například skoro prázdná dálnice.

Poznámka 4.6. Deterministická varianta částicového systému je naopak rozdělení, které má nulový rozptyl, vypadá tedy jako Diracova funkce (např. když se jede krokem).

Poznámka 4.7. Pro $g(x) = \Theta(x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ platí, že $g(x) \in \mathscr{B}$. Navíc v tomto případě $\kappa = \lambda$.

Důkaz.

$$\alpha > \lambda \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{e}^{\alpha x} = \lambda \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{(\alpha-\lambda)x} = +\infty$$
$$\alpha < \lambda \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{e}^{\alpha x} = \lambda \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{(\alpha-\lambda)x} = 0$$

□

Definice 4.8. Pokud $\mu_0(g) = 1$, pak řekneme, že g(x) je **balancovaná** hustota pravděpodobnosti a označíme $g(x) \in \mathscr{B}_1$. Pokud $\mu_0(g) = \mu_1(g) = 1$, pak řekneme, že $g(x)$ je **škálovaná** hustota pravděpodobnosti a označíme $g(x) \in \mathscr{B}_{11}$.

Příklad 4.9. Vypočtěme nyní, pro které parametry λ, A je $g(x) := \Theta(x)A\mathrm{e}^{-\lambda x} \in \mathscr{B}_{11}$.

$$\mu_0(g) = \int_0^{+\infty} A\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}A \Rightarrow A = \lambda$$

$$\mu_1(G) = \int_0^{+\infty} xA\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\lambda\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1$$

Věta 4.10 (Balanční kritérium)**.** *Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$. Pak platí, že*

$$\mathrm{inb}(g) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(g(x))}{x},$$

přičemž limita vpravo existuje vždy.

Důkaz. Označme $\omega := \mathrm{inb}(g)$.
Vezměme libovolné $\beta > \omega$. Pak $\lim_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\beta x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{g(x)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists x_0 > 0)(\forall x \in [x_0, +\infty)) \left(\left|\frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{g(x)}\right| < \varepsilon\right) \Rightarrow \mathrm{e}^{-\beta x} < \varepsilon g(x) \overset{\varepsilon<1}{<} g(x).$$

Nyní vezměme libovolné $\alpha < \omega$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\alpha x} = 0 \Rightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists x_0' > 0)(\forall x \in [x_0', +\infty))\left(g(x)\mathrm{e}^{\alpha x} < \varepsilon\right),$$

Tedy $g(x) < \varepsilon \mathrm{e}^{-\alpha x} < \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Potom pro $(\forall\beta > \omega, \forall\alpha < \omega)$ platí, že

$$\mathrm{e}^{-\beta x} < g(x) < \mathrm{e}^{-\alpha x} \quad\Rightarrow\quad -\beta x < \ln g(x) < -\alpha x \quad\Rightarrow\quad -\beta < \frac{\ln g(x)}{x} < -\alpha$$

α, β lze k sobě přiblížit libovolně blízko $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(g(x))}{x} = -\omega$ □

Příklad 4.11. Mějme $g(x) := \Theta(x)A\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

$$\mathrm{inb}(g) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(\Theta(x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x})}{x} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{-\lambda x}{x} = \lambda$$

Příklad 4.12. Příklady funkcí z $\mathscr{B}$:

1. $\Theta(x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$
2. $A\Theta(x-c)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0, c > 0, A > 0)$
3. Erlangova hustota
4. Gamma hustota
5. GIG hustota

Do $\mathscr{B}$ nepatří např. Gamma hustota, ani $\Theta(x)x^n\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$

Věta 4.13 (O rozsáhlosti soustavy $\mathscr{B}$)**.** *Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$ a $A > 0$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Pak platí*

1) $f(x) + \alpha g(x) \in \mathscr{B}$

2) $x^\alpha f(x) \in \mathscr{B}$

3) $\mathrm{e}^{\beta x} f(x) \in \mathscr{B}$, *pokud* $\beta < \mathrm{inb}(f)$

4) $Af(cx) \in \mathscr{B}$

Navíc platí:

i) $\mathrm{inb}(\alpha f(x)) = \mathrm{inb}(f)$

ii) $\mathrm{inb}(f+g) = \min\{\mathrm{inb}(f), \mathrm{inb}(g)\}$

iii) $\mathrm{inb}(x^\alpha f(x)) = \mathrm{inb}(f)$

iv) $\mathrm{inb}(\mathrm{e}^{\beta x} f(x)) = \mathrm{inb}(f) - \beta$

v) $\mathrm{inb}(Af(cx)) = c\,\mathrm{inb}(f)$

Důkaz.

2) Mějme $f(x) \in \mathscr{B}$, $\alpha \geqslant 0$ a definujme $h(x) := x^\alpha f(x)$. Nyní otestujeme, že platí vztah $x^\alpha f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$. Zvolme tedy libovolně $\varepsilon > 0$ a $\beta < \mathrm{inb}(f)$. Potom platí, že

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\beta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\exists x_0 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in [x_0, +\infty)) \left(f(x) \leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{-\beta x}\right)$$

a) Interval $(-\infty, x_0)$:

$$f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad x^\alpha f(x) \leqslant K f(x) \in \mathscr{L}((-\infty, x_0))$$

b) Interval $[x_0, +\infty)$:

$$x^\alpha f(x) \leqslant x^\alpha \varepsilon \mathrm{e}^{-\beta x} \in \mathscr{L}([x_0, +\infty)) \quad \overset{\text{srov.krit.}}{\Longrightarrow} \quad x^\alpha f(x) \in \mathscr{L}([x_0, +\infty))$$

Celkově tedy $x^\alpha f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

3) Ukažme platnost vztahu $\mathrm{e}^{\gamma x} f(x) \in \mathscr{B}$ za předpokladu, že $\gamma < \mathrm{inb}(f)$.

$$\mathrm{inb}(\mathrm{e}^{\gamma x} f(x)) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^{\gamma x} f(x))}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\gamma x}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{x} = -\gamma + \mathrm{inb}(f) \overset{!}{>} 0$$

iii)

$$\mathrm{inb}(x^\alpha f(x)) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^\alpha f(x))}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \ln(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{x} = \mathrm{inb}(f)$$

□

Lemma 4.14. *Mějme $f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$. Pak $(\forall A \in \tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{M}_\lambda)(f(x)$ má Lebesgueův integrál na A a je konečný.)*

Důsledek 4.15. *Každá balancovaná hustota má úplně všechny momenty, tj. platí, že*

$$x^k f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mu_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definice 4.16. Buď $f(x) \in \mathscr{B}$, pak vektor $\vec{\mu} = (\mu_0, \mu_1, ...)$ vytvořený z momentů $\mu_k \in \mathbb{R}$ nazveme **momentovým kódem hustoty** $f(x)$.

Definice 4.17. Nechť $f(x) \in \mathscr{B}$ a $\omega := \mathrm{inb}(f)$. Pak funkci $f(x)\mathrm{e}^{\omega x}$ nazveme **balančním jádrem hustoty** $f(x)$.

Příklad 4.18. Příklady balančních jader:

Funkce z $\mathscr{B}$	Balanční jádro	
$\Theta(x)\mathrm{e}^{-x}$	$\Theta(x)$	
$\Theta(x)x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$	$\Theta(x)x^\alpha$	$(\alpha \geqslant 0)$
$\Theta(x)\frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{e}^{-x}$	$\Theta(x)\frac{x^n}{1+x^n}$	$(n \in \mathbb{N})$
GIG jádro	$\Theta(x)x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{x}}$	$(\alpha \geqslant 0,\ \beta > 0)$

Věta 4.19. *Nechť $g(x)$ je balanční jádro a $\omega > 0$ je pevně zvolené libovolné číslo. Pak pro $h(x) := g(x)\mathrm{e}^{-\omega x} \in \mathscr{B}$ platí, že $\mathrm{inb}(h) = \omega$.*

Důkaz.

I. $\alpha > \omega$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\alpha x} = \lim_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\omega x}\mathrm{e}^{\alpha x} \overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\omega x}\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\kappa x} \overset{\varepsilon>0}{=}$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{(\kappa+\varepsilon)x}}_{=+\infty} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{(-\omega+\alpha-\varepsilon)x}}_{=+\infty} = +\infty$$

* - víme, že existuje $f(x) \in \mathscr{B}$ tak, že $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{\kappa x}$, kde $\mathrm{inb}(f) = \kappa > 0$

II. $\alpha < \omega$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \overset{**}{=} \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\omega x}\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\kappa x} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{(\kappa-\varepsilon)x}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{(-\omega+\alpha+\varepsilon)x}}_{=0} = 0$$

$\square$

5 Laplaceova transformace

Definice 5.1. Laplaceovou transformací rozumíme transformaci ve tvaru

$$F(s) = \mathfrak{L}[f(x)] := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x,$$

kde e^{-sx} nazýváme **jádro integrální transformace**.

Věta 5.2 (Pomocná věta pro Laplaceovu transformaci)**.** *Mějme* $g(x) \in \mathscr{B}$*, kde* $\mathrm{inb}(g) = \kappa$*. Potom platí, že*

$$(\forall \mu < \kappa)(g(x)\mathrm{e}^{\mu x} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}))$$

Důkaz. Zvolme libovolně $\gamma < \kappa = \mathrm{inb}(g)$. Potom

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\gamma x} = 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in [x_0, +\infty))(|g(x)\mathrm{e}^{\gamma x}| < \varepsilon)$$

I. integrabilita na $(-\infty, x_0) : g(x)\mathrm{e}^{\gamma x} \leqslant Kg(x) \in \mathscr{L}((-\infty, x_0)) \Rightarrow$ ze srovnávacího kritéria $g(x)\mathrm{e}^{\gamma x} \in \mathscr{L}((-\infty, x_0))$

II. integrabilita na $[x_0, +\infty) : g(x)\mathrm{e}^{\mu x} \leqslant \varepsilon\mathrm{e}^{-\gamma x}\mathrm{e}^{\mu x} = \varepsilon\mathrm{e}^{-(\gamma-\mu)x} \in \mathscr{L}([x_0, +\infty)) \Rightarrow$ ze srovnávacího kritéria $g(x)\mathrm{e}^{\gamma x} \in \mathscr{L}([x_0, +\infty))$

Z toho plyne, že $g(x)\mathrm{e}^{-\gamma x} \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

$\square$

Důsledek 5.3.

$$\mathrm{Dom}(\underbrace{\mathfrak{L}[g(x)]}_{F(s)}) = (\underbrace{-\,\mathrm{inb}(g)}_{<0}, +\infty) \Rightarrow U_\delta(0) \subset \mathrm{Dom}(F(s))$$

Definice 5.4. Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$. Pak funkce

$$h(x) := \Theta(x)\int_x^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x, \qquad f(x) := \Theta(x)\int_0^x g(x)\mathrm{d}x$$

budeme nazývat **chvostovou distribuční** funkcí, resp. **distribuční** funkcí.

Věta 5.5 (O chvostové distribuční funkci)**.** *Pokud* $g(x) \in \mathscr{B}$ *a* $\mathrm{inb}(g) = \omega$*, pak pro* $h(x) := \Theta(x)\int_x^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$ *platí, že* $h(x) \in \mathscr{B}$ *a* $\mathrm{inb}(h) = \omega$*.*

Důkaz. Dokážeme, že $\mathrm{inb}(h) = \omega$. Ověříme tedy platnost obou nerovnic.

1. Zvolme libovolně čísla α, μ tak, aby $\alpha < \mu < \omega$. Z předpokladu víme, že $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mu x} = 0$, tedy

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in [x_0, +\infty))\,(|g(x)\mathrm{e}^{\mu x}| \leqslant \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad g(x) \leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{-\mu x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\alpha x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x} \int\limits_x^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y \leqslant \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x} \int\limits_x^{+\infty} \varepsilon \mathrm{e}^{-\mu y}\mathrm{d}y = \lim_{x\to+\infty} \varepsilon \mathrm{e}^{\alpha x} \frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-\mu x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\varepsilon}{\mu}\mathrm{e}^{-(\mu-\alpha)x} = 0, \text{ čímž jsme dokázali první nerovnost.}$$

2. Zvolme nyní libovolně čísla α, μ tak, aby $\alpha > \mu > \omega$. Z předpokladu věty a definice inb vyplývá, že

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mu x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g(x)\mathrm{e}^{\mu x}} = 0, \text{ proto platí, že}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in \mathbb{R}^+)\left(\left|\frac{1}{g(x)\mathrm{e}^{\mu x}}\right| \leqslant \varepsilon\right) \quad \Rightarrow \quad g(x) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mu x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\alpha x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x} \int\limits_x^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y \geqslant \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x} \int\limits_x^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mu y}\mathrm{d}y = \frac{\varepsilon}{\mu} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{-\mu x} = +\infty$$

Tímto jsme dokázali i druhou nerovnost, tedy $\mathrm{inb}(h) = \omega$.

$\square$

Věta 5.6 (O distribuční funkci)**.** *Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$ a $\mathrm{inb}(g) = \omega$. Označme $f(x) := \Theta(x)\int\limits_0^x g(y)\mathrm{d}y$. Pak $f(x)$ má následující vlastnosti:*

1. *je nezáporná*
2. *je neklesající*
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mu_0(g)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
5. $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$
6. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
7. *je omezená*

Důkaz. 2) Mějme $x_1 > x_2$. Potom

$$f(x_1) = \Theta(x_1)\int\limits_0^{x_1} g(y)\mathrm{d}y = \Theta(x_1)\left[\underbrace{\int\limits_0^{x_2} g(y)\mathrm{d}y}_{f(x_2)} + \underbrace{\int\limits_{x_2}^{x_1} g(y)\mathrm{d}y}_{\geqslant 0}\right] \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Theta(x)\int\limits_0^x g(y)\mathrm{d}y = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{\Theta(x-y)}_{\text{Vznikne úpravou horní meze.}} g(y)\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \Theta(n-y)g(y)\mathrm{d}y =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Lebesgueova věta:} \\ |\Theta(n-y)g(y)| \leqslant g(y) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}) \end{array} \right| = \int\limits_0^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y = \mu_0(g)$$

5) Pro libovolné $a \in \mathrm{Dom}(f)$ platí, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \Theta(x)\int\limits_0^x g(y)\mathrm{d}y \overset{\dots}{=} \Theta(a)\int\limits_0^a g(y)\mathrm{d}y = f(a)$$

□

Věta 5.7 (Konvoluce v $\mathscr{B}$)**.** *Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$. Pak definujeme konvoluci f, g jako*

$$(f*g)(x) = \underbrace{\int\limits_R f(y)g(x-y)\mathrm{d}y}_{v\ \mathscr{H}} = \underbrace{\Theta(x)\int\limits_0^x f(y)g(x-y)\mathrm{d}y}_{v\ \mathscr{B}}$$

Věta 5.8. *Mějme $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$ tak, že $\mathrm{inb}(f) = \omega_1$ a $\mathrm{inb}(g) = \omega_2$ Pak platí, že*

$$(f*g)(x) \in \mathscr{B} \quad a \quad \mathrm{inb}(f*g) = \min\{\omega_1, \omega_2\}.$$

Věta 5.9. *Je-li $g(x) \in \mathscr{B}$, pak $F(s) = \mathfrak{L}[g(s)]$ je spojitá na $(-\omega, +\infty)$, kde $\omega = \mathrm{inb}(g)$.*

Schéma důkazu.

- $F(s) = \int\limits_R g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$
- spojitost v bodě $s_0 \in (-\omega, +\infty) \Rightarrow -\omega < s_0$
- věta o spojitosti integrálu s parametrem (MAB)
- $\lim\limits_{s\to s_0} g(x)\mathrm{e}^{-sx} = g(x)\mathrm{e}^{-s_0 x}$
-

$$|g(x)\mathrm{e}^{-sx}| = g(x)\mathrm{e}^{-sx} \leqslant \begin{cases} x \in [x_0, +\infty) & g(x)K \in \mathscr{L}(\mathbb{R}) \\ x \in (-\infty, x_0) & g(x)\mathrm{e}^{-sx} \leqslant g(x)\mathrm{e}^{-\xi x} \in \mathscr{L}([x_0, +\infty)),\ \textit{pokud}\ \xi > -\omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(s) \in \mathcal{C}((-\omega, +\infty))$$

$$F(0) = \mu_0$$

□

5.1 Maclaurinova řada

$$g(x) \in \mathscr{B},\ G(s) = \mathfrak{L}[g(x)] = \int\limits_R g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Dom}(G) = (-\operatorname{inb}(g), +\infty)$$

$$\underbrace{\exists \delta > 0 : U_\delta(0) \subset \mathrm{Dom}(g)}_{\text{nutné ke konstrukci Mac. řady obrazu } G(s)}$$

$G(s) \in C^\infty(\mathrm{Dom}(G)) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : G^{(k)}(0) \in \mathbb{R}$

$$G^{(k)}(s) = (-1)^k \int\limits_R g(x)x^k\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$$

$$G^{(u)}(s) = (-1)^k \int\limits_R g(x)x^k\mathrm{d}x = (-1)^k\mu_k$$

Řadou podezřelou z toho, že bude Maclaurinovou řadou funkce $G(s)$ je:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!}s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\mu_k}{k!}s^k$$

Vlastnosti $G(s)$:

1. $G(s) \in C^\infty(\mathrm{Dom}(G))$
2. $G(s)$ nezáporná na $\mathrm{Dom}(G)$
3. $G(0)$ je klesající na $\mathrm{Dom}(G) \Leftarrow \forall s \in \mathrm{Dom}(G)\ G'(s) < 0$
4. $G(0) = \mu_0$
5. $\lim\limits_{s\to\infty} G(s) = 0$
6. $G(s)$ je omezená na $[0, +\infty)$

Věta 5.10 (O obrazu distribuční funkce)**.** *Mějme* $g(x) \in \mathscr{B},\ \operatorname{inb}(g) = \omega$*. Označme* $h(x) = \Theta(x)\int\limits_0^x g(y)\mathrm{d}y$*. Pak k* $h(x)$ *existuje Laplaceův obraz (ozn.* $H(s)$*) a platí, že*

$$sH(s) = G(s) \quad (\forall s \in (-\omega, +\infty)),$$

kde $G(s) = \mathfrak{L}[g(x)]$*.*

Důkaz.

$$H(s) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}} \Theta(x)\int\limits_0^x g(y)\mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x \overset{F.V.}{=\!=} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Theta(x)\Theta(x-y)g(y)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}(x,y)$$

$$|\Theta(x)\Theta(x-y)g(y)\mathrm{e}^{-sx}| \leqslant g(y)\mathrm{e}^{-sx}\Theta(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \exists H(s)$$

$$sH(s) = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta(x)\Theta(x-y)g(y)s\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\left[\int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\Theta(x-y)s\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g(y)\left[\int_y^{\infty} s\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(y)[-\mathrm{e}^{-sx}]_y^{\infty} = \int_{\mathbb{R}} g(y)\mathrm{e}^{-sy}\mathrm{d}y = G(s)$$

□

Analogicky: Jak laplaceovsky zobrazit chvostovou distribuční funkci $\underbrace{f(x) = \Theta(x)\int_x^{\infty} g(y)\mathrm{d}y}_{\in\mathscr{B};\ \mathrm{inb}(f)=\mathrm{inb}(g)}$?

$$F(s) = \mathfrak{L}[g(y)] = \int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\int_x^{\infty} g(y)\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x \xlongequal{F.V.} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta(x)\Theta(y-x)g(y)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}(x,y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g(y)\left[\int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\Theta(y-x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(y)\left[\int_0^y \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(y)\left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-sx}\right]_0^y \mathrm{d}y =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g(y)\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-sy}\right]\mathrm{d}y = \frac{\mu_0}{s} - \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}} g(y)\mathrm{e}^{-sy}\mathrm{d}y = \frac{\mu_0 - G(s)}{s}$$

Poznámka 5.11. $sH(s) + sF(s) = G(s) + \mu_0 - G(s) = \mu_0 \Rightarrow H(s) + F(s) = \frac{\mu_0}{s}$ - vztah mezi distribučními funkcemi

Věta 5.12 (O integrálu obrazu)**.** *Nechť* $\frac{g(x)}{x} \in \mathscr{B}$ *a* $\mathrm{inb}(\frac{g}{x}) = \omega$*. Pak* $g(x) \in \mathscr{B}$ *a* $\mathrm{inb}(g) = \omega$ *a* $\forall s \in (-\omega, \omega)$ *platí:*

$$\mathfrak{L}\left[\frac{g(x)}{x}\right] = \int_s^{\infty} G(p)dp, \ \ kde\ G(s) = \mathfrak{L}[g(x)].$$

Důkaz.

$$\int_s^{\infty} G(p)dp = \int_s^{\infty}\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x dp = \int_{\mathbb{R}} g(x)\left[\int_s^{\infty} \mathrm{e}^{-px}dp\right]\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\left[-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-px}\right]_s^{\infty}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x =$$
$$= \mathfrak{L}\left[\frac{g(x)}{x}\right]$$

□

Věta 5.13. *Nechť* $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$ *a* $F(s), G(s)$ *jsou jejich* $\mathfrak{L}$*-obrazy. Pak platí*

$$\int_0^{\infty} f(x)G(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} F(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Důkaz.

$$\int_0^\infty f(x) \underbrace{\int_0^\infty g(y)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y}_{G(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty g(y) \underbrace{\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x}_{F(y)}\,\mathrm{d}y$$

□

Věta 5.14 (Lerchův teorém). *Je-li $f(x) \in \mathcal{P}$ a existuje-li $s_0 \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\forall s \in [s_0, +\infty)$ je $F(s) = \mathfrak{L}[f(x)] = 0$, pak $f(x) \sim 0$.*

Důkaz. Označme $\varphi(s) = \int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$ a $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(a_k \in \mathbb{R})$. Pak

$$\int_0^\infty f(x)P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{e}^{-kx}f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-(s+k)x}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi(s+k)$$

Pokud $\big(\forall s \in [s_0, +\infty)\big)\big(F(s) = 0\big)$, pak pro $s > s_0$: $\int\limits_0^\infty f(x)P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = 0$. Provedeme substituci $\left|\begin{array}{c} y = \mathrm{e}^{-x} \\ x = -\ln(y) \\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{y}\mathrm{d}y \end{array}\right|$. Dostaneme tedy $\int\limits_0^1 f(-\ln(y))P(y)y^{s-1}\mathrm{d}y = 0$ a $H(y) = f(-\ln(y))y^{s-1}$.

$$\int_0^1 H(y)P(y)\mathrm{d}y = 0 \quad \forall P(x) \text{ jako polynom}$$

$H(y) \in \mathcal{PC}([0,1])$, což je pre-Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f|g\rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$. V $\mathcal{PC}([0,1])$ zvolíme nějakou polynomickou bázi (Legendrovy polynomy $(= \lambda_k(x))$). Potom $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 H(y)\lambda_k(y)\mathrm{d}y = 0 \quad\Rightarrow\quad H(y) \perp \lambda_k(y) \quad\Rightarrow\quad H(y) \sim 0 \quad\Rightarrow\quad f(-\ln(y))y^{s-1} \sim 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f(-\ln(y)) \sim 0 \quad\Rightarrow\quad f(x) \sim 0$$

□

Poznámka 5.15. Větu lze zobecnit i na jiné funkce než polynomy. Nechť $f(t)$ je definována na $0 \leqslant t < +\infty$, je po částech spojitá a $(\exists\alpha, M)(0 \leqslant t < +\infty)\big(|f(t)| \leqslant M\mathrm{e}^{\alpha t}\big)$. Potom existuje-li $s_0 \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\forall s \in [s_0, +\infty)$ je $F(s) = \mathfrak{L}[f(x)] = 0$, pak $f(x) \sim 0$.

5.2 Laplaceův obraz balancované hustoty

Mějme $g(x) \in \mathscr{B}$, $G(s) = \mathfrak{L}[g(x)]$, $\mathrm{Dom}(G) = (-\mathrm{inb}(g), +\infty)$. Myšlenka:

$$G(s) \overset{U_\delta(0)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!}s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\mu_k}{k!}s^k \tag{5.1}$$

Věta 5.16 (O analytičnosti $G(s)$ v nule)**.** *Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$ a $G(s) = \mathfrak{L}[g(x)]$. Pak $G(s)$ je analytické v bodě $s = 0$ a pro její Taylorovy koeficienty platí rovnosti*

$$a_k = \frac{(-1)^k \mu_k}{k!},$$

kde $\vec{\mu}$ je momentový kód hustoty $g(x)$.

Důkaz. z MAB3 (kritérium analytičnosti): Označme R zbytek u Taylorova rozvoje. Potom $g(x)$ je analytická v bodě $x = x_0 \Leftrightarrow (\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0)) \left(\lim\limits_{n\to+\infty} R_{n+1}(x) = 0\right)$

$$s_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{n+1}(s) = \frac{G^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(s-s_0)^{n+1} = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}G^{(n+1)}(\xi)$$

$$G(s) = \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x \ \Rightarrow \ G^{(n+1)}(s) = \int_0^{+\infty} (-1)^{n+1}x^{n+1}g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ G^{(n+1)}(\xi) = (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} x^{n+1}g(x)\mathrm{e}^{-\xi x}\mathrm{d}x)$$

Tuto rovnost nyní dosadíme o předpisu pro $R_{n+1}(s)$.

$$|R_{n+1}(s)| = \left|\frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^{+\infty} x^{n+1}g(x)\mathrm{e}^{-\xi x}\mathrm{d}x\right| = \left| \begin{matrix} |\xi| < \delta \\ 2\delta < \operatorname{inb}(g) \end{matrix} \right| \leqslant \left|\frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^{+\infty} \underbrace{x^{n+1}g(x)\mathrm{e}^{\delta x}}_{\in\mathscr{B}}\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|\frac{s^{n+1}}{\delta^{n+1}}\int_0^{+\infty} \frac{(\delta x)^{n+1}}{(n+1)!}g(x)\mathrm{e}^{\delta x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{s^{n+1}}{\delta^{n+1}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\delta x}g(x)\mathrm{e}^{\delta x}\mathrm{d}x = \frac{s^{n+1}}{\delta^{n+1}}\int_0^{+\infty} \underbrace{g(x)\mathrm{e}^{2\delta x}}_{\in\mathscr{B}}\mathrm{d}x = K\frac{s^{n+1}}{\delta^{n+1}}$$

$$(\forall s \in (-\delta,\delta))\left(\lim_{n\to+\infty} K\frac{s^{n+1}}{\delta^{n+1}} = 0\right) \Rightarrow (\forall s \in (-\delta,\delta))\left(\lim_{n\to+\infty} R_{n+1}(s) = 0\right) \Rightarrow R \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{inb}(g)$$

□

Důsledek 5.17. *$G(s)$ má Maclaurinovu řadu.*

Věta 5.18 (O analytičnosti $G(s)$ v libovolném bodě $s_0 \in (-\operatorname{inb}(g), +\infty)$)**.** *Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$. Pak $G(s) = \mathfrak{L}[g(x)]$ je analytickou funkcí v každém bodě svého definičního oboru.*

Důkaz. 1. zvolme $\alpha \in (-\operatorname{inb}(g), +\infty)$

2. zkoumejme analytičnost $G(s)$ v bodě α

3. zaveďme $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \in \mathscr{B}$

4. umíme určit momentový kód funkce $h(x)$ z momentového kódu $\vec{\mu}$ funkce $g(x)$

$$\mu_{\alpha,k} := \mu_k(h) = \int_{\mathbb{R}} x^k h(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x^k g(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \mu_{k+n}(g)$$

$$H(s) = \mathfrak{L}[h(x)] = \mathfrak{L}[g(x)\mathrm{e}^{\alpha x}] = G(s-\alpha)$$

$h(x) \in \mathscr{B} \Rightarrow H(s)$ je analytická funkce v nule $\Rightarrow G(s-\alpha)$ je analytická v nule $\Rightarrow G(s)$ je analytická v $s_0 = \alpha$.

□

Poznámka 5.19. Z důkazu minulé věty víme, že $H^{(k)}(\xi) = (-1)^k \int_0^{+\infty} x^k h(x)\mathrm{e}^{-\xi x}\mathrm{d}x$. Potom ale

$$H(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^{(k)}(0)}{k!} s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mu_k(h)}{k!} s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mu_{\alpha,k}}{k!} s^k = G(s-\alpha)$$

$$G(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mu_{\alpha,k}}{k!} (s-\alpha)^k \Rightarrow \boxed{G^{(k)}(\alpha) = (-1)^k \mu_{\alpha,k}}$$

$\forall k \in \mathbb{N}_0$ tedy platí, že $\underbrace{G^{(k)}(0) = H^{(k)}(0)}_{\vec{\mu}=\vec{\kappa}} \Rightarrow G(s) = H(s)$ všude na $(-\delta, +\infty)$, $\delta > 0$.

Věta 5.20 (O jednoznačnosti kódování)**.** *Nechť jsou dány $g(x), h(x) \in \mathscr{B}$ s momentovými kódy $\vec{\mu}$, resp. $\vec{\kappa}$. Pak platí*

$$\vec{\mu} = \vec{\kappa} \Rightarrow g(x) \sim h(x)$$

Důkaz. Nechť $\vec{\mu} = \vec{\kappa}$. Pak platí, že

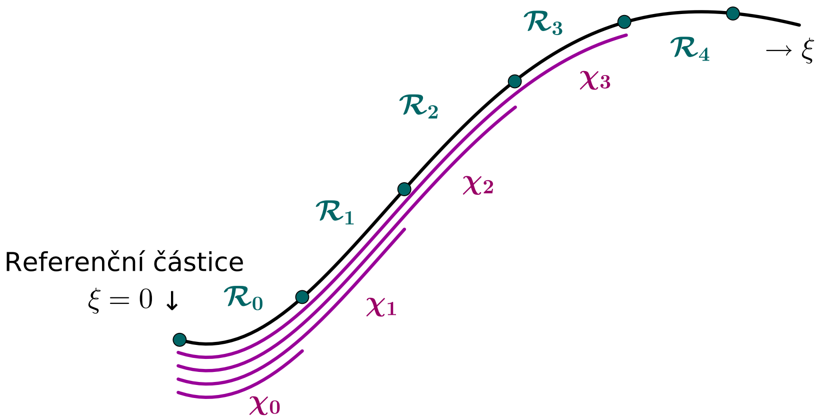
$$(\forall k \in \mathbb{N}_0)(G^{(k)}(0) = H^{(k)}(0)) \Rightarrow (\forall s \in (-\delta, +\infty))(G(s) = H(s)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow G(s) - H(s) = 0 \overset{\text{Lerchův teorém}}{\Longrightarrow} g(x) - h(x) \sim 0 \Rightarrow g(x) \sim h(x)$$

□

Věta 5.21 (Nutná podmínka pro momentový kód balancované hustoty)**.** *Je-li $\vec{\mu}$ momentový kód balancované hustoty, pak $\exists \delta > 0$ tak, že*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\mu_k}{k!} x^k = 0 \quad \forall x \in U_\delta(0)$$

6 Částicové systémy



V MCS máme vždy jednodimenzionální, stochastické systémy s pevným počátkem. Existuje několik způsobů, jak popsat částicový systém:

I. Rozteče sousedních částic

- značíme $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{+\infty}$, jde o posloupnost náhodných veličin, které jsou absolutně spojité a nezáporné
- nepovinné vlastnosti:
    - $\mathcal{R}_k$ mají omezený support
    - $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, ...$ i.d. (velmi výhodné)
    - $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, ...$ i.i.d. (velmi výhodné)
- $\mathcal{R}_k \sim g_k(x)$[1]
- Pokud $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ mají totožné rozdělení, pak stačí psát $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \sim h(x)$, kde $h(x)$ nazýváme **generátorem částicového systému**.

II. Multirozteče

- Jako χ_k označujeme vzdálenost $k+1$-ní částice od referenční částice $k=0$ a nazýváme ji k**-tá multirozteč**.
- $\chi_k = \sum\limits_{i=0}^{k} \mathcal{R}_i$

[1] Značení na 01MIP: $X \sim P^X$.

- $\chi_0 = \mathcal{R}_0 \sim h(x)$
- $\chi_1 = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 \sim ?$

Definice 6.1. Nechť $X \sim g(x)$ a $Y \sim h(y)$ jsou absolutně spojité náhodné veličiny. Řekneme, že X a Y jsou **konvolučně kompatibilní**, pokud má náhodná veličina $X+Y$ rozdělení popsané hustotou $h(z) = (g * h)(z)$.

Poznámka 6.2.

1. Z 01MIP víme, že pokud X, Y jsou nezávislé, pak X, Y jsou konvolučně kompatibilní.
2. Jsou-li $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$ konvolučně kompatibilní, pak platí:

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 \sim (h * h)(x) \\
\chi_2 &= \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \chi_1 + \mathcal{R}_2 \sim (h * h * h)(x) \\
\chi_k &= \sum_{m=0}^{k} \mathcal{R}_m \sim \mathop{\ast}_{m=0}^{k} h(x) \overset{\text{ozn.}}{=\!=} \mathop{\ast}_{k} h(x)
\end{aligned}$$

III. Intervalová frekvence η_L

- vyjadřuje počet částic vyskytujících se na intervalu $(0, L)$ za referenční částicí
- je to disktrétní náhodná veličina
- je popsána pravděpodobnostmi $P[\eta_L = k],\ k = 0, 1, 2, \ldots$
- η_L je parametrizováno hodnotou $L > 0$

Příklad 6.3.

$$P[\eta_L = 0] = P[\mathcal{R}_0 \geqslant L] = 1 - P[\mathcal{R}_0 < L] = 1 - H(L),$$

kde $h(x)$ je rozdělení roztečí $\mathcal{R}_k$ a $H(x)$ je distribuční funkce příslušná k $h(x)$, tj. $H(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} h(\tau) d\tau$.[2]

Příklad 6.4.

$$P[\eta_L = k] \overset{k \in \mathbb{N}}{=} P[\chi_{k-1} < L \wedge \chi_k \geqslant L] = P[[\chi_{k-1} < L] \cap [\chi_k < L]^c] = \left| A \cap B^c = A \setminus B \right| =$$

$$= P\Big[\underbrace{[\chi_{k-1} < L]}_{a} \setminus \underbrace{[\chi_k < L]}_{b}\Big] = P[\chi_{k-1} < L] - P[\chi_k < L] = \left| \begin{array}{l} \chi_0 \sim g_0(x) = h(x) \\ \chi_k \sim g_k(x) = \ast_k h(x) \\ G_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} g_k(\tau) d\tau \end{array} \right| =$$

$$= G_{k-1}(L) - G_k(L).$$

[2] V 01MCS požíváme definici distribuční funkce $G(x) = g[X < x]$ narozdíl od 01MIP, kde $G_X(x) = g[X \leqslant x]$.

Cesta zpět z III. do I. a II.

- známe $P[\eta_L = k]$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a všechna $L > 0$
- $\underbrace{H(L)}_{=G_0(L)} = 1 - P[\eta_L = 0] \Rightarrow$ známe distribuční funkci pro $\mathcal{R}_0 = \chi_0$

$$h(x) = \frac{dH(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{d}{\mathrm{d}x} P[\eta_x = 0],$$

takže $-\frac{d}{\mathrm{d}x} P[\eta_x = 0]$ je generátorem částicového systému.

$$P[\eta_x = 1] = G_0(x) - G_1(x) \quad \Rightarrow \quad G_1(x) = G_0(x) - P[\eta_x = 1] = 1 - P[\eta_x = 0] - P[\eta_x = 1]$$
$$P[\eta_x = 2] = G_1(x) - G_2(x) \quad \Rightarrow \quad G_2(x) = 1 - P[\eta_x = 0] - P[\eta_x = 1] - P[\eta_x = 2]$$

$$\Rightarrow G_k(x) = 1 - \sum_{m=0}^{k} P[\eta_x = m], \; g_k(x) = -\sum_{m=0}^{k} \frac{dP[\eta_x = m]}{\mathrm{d}x}$$

Poissonovský částicový systém: nejkrásnější varianta ČS

Definice 6.5. Částicový systém, jehož intervalové frekvence jsou popsány rozdělením

$$P[\eta_L = k] = \mathrm{e}^{-L} \frac{L^k}{k!}, \; (L > 0, \; k \in \mathbb{N}_0),$$

se nazývá **Poissonovský částicový systém**.

- nejčastěji bývá zadaný pomocí III.
- Generátor: $h(x) = -\frac{d}{\mathrm{d}x} P[\eta_x = 0] = -\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^0}{0!}\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}, \quad x > 0.$

$$g_k(x) = -\sum_{m=0}^{k} \frac{d}{\mathrm{d}x} P[\eta_x = m] = -\sum_{m=0}^{k} \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{-x}\right) = -\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!}[m x^{m-1} - x^m]\mathrm{e}^{-x} =$$
$$= \left(-\sum_{m=1}^{k} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{m=0}^{k} \frac{x^m}{m!}\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(-\sum_{m=0}^{k-1} \frac{x^m}{m!} + \sum_{m=0}^{k} \frac{x^m}{m!}\right)\mathrm{e}^{-x} = \underbrace{\Theta(x)\frac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x}}_{\text{Erlangovo rozdělení}}$$

Balanční částicový systém

Definice 6.6. Balančním částicovým systémem rozumíme posloupnost multiroztečí $(\chi_k)_{k=0}^{+\infty}$ zavedených předpisem

$$\chi_k = \sum_{l=0}^{k} \mathcal{R}_l,$$

splňující axiomy:

1. (axiom konvoluční kompatibility) $(\mathcal{R}_n)_{n=0}^{+\infty}$ je posloupnost nezáporných, absolutně spojitých, stejně rozdělených a konvolučně kompatibilních náhodných veličin.

2. (axiom balančního generátoru). Hustota pravděpodobnosti veličiny $\mathcal{R}_0$ (tzv. generátor BČS) patří do třídy $\mathscr{B}$, tj. $h(x) \in \mathscr{B}$.

3. (axiom škálování) $\mu_1(h) = \mathrm{E}(\mathcal{R}_0) = 1$. (může být chápán jako nepovinný)

$$P[\eta_L = 0] = 1 - \int_0^L \underbrace{h(x)}_{g_0(x)}\,\mathrm{d}x \qquad a \qquad P[\eta_L = k] = \int_0^L g_{k-1}(x)\mathrm{d}x - \int_0^L g_k(x)\mathrm{d}x$$

Věta 6.7. *Nechť je dán libovolný BČS generovaný hustotou $h(x) \in \mathscr{B}$. Pak jsou funkce*

$$r(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x), \qquad s(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} n g_n(x), \qquad t(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 g_n(x)$$

omezené na každém intervalu $[0, L]$.

Důkaz. Víme, že $(\exists K > 0)\,(h(x) < K)$, protože $h(x) \in \mathscr{B}$ (jsou tedy omezené). Indukcí ověříme, že $g_n(x) \leqslant \Theta(x)K^{n+1}\frac{x^n}{n!}$:

$$g_1(x) = h(x) * h(x) = \Theta(x)\int_0^x h(y)h(x-y)\mathrm{d}y \leqslant \Theta(x)K^2\int_0^x 1\mathrm{d}y = \Theta(X)K^2 x$$

$$g_2(x) = \underset{2}{*}\, h(x) = g_1(x) * h(x) = \Theta(x)\int_0^x g_1(y)h(x-y)\mathrm{d}y \leqslant \Theta(x)K^2\int_0^x yK dy = \Theta(x)K^3\frac{x^2}{2}$$

$$g_{n+1}(x) = (g_n * h)(x) = \Theta(x)\int_0^x g_n(y)h(x-y)\mathrm{d}y \leqslant \Theta(x)K^{n+1}\frac{1}{n!}K\int_0^x y^n\mathrm{d}y = \Theta(x)\frac{K^{n+2}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\text{Dále potom} \quad g_n(x) \leqslant \Theta(x)K^{n+1}\frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad g_n(x) \leqslant K^{n+1}\frac{L^n}{n!} \quad x \in [0, L]$$

$$r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} K^{n+1}\frac{L^n}{n!} = K\mathrm{e}^{KL} \overset{\text{ozn.}}{=\!=} M \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (\forall x \in [0, L])(|r(x)| \leqslant M)$$

Tímto jsme ověřili konvergenci řady $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$. Analogicky pak

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n g_n(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} K^{n+1} \frac{L^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} K^{n+2} \frac{L^{n+1}}{n!} = K^2 L \mathrm{e}^{KL} \stackrel{\text{ozn.}}{=\!=} \tilde{M},$$

tedy $(\forall x \in [0,L])(s(x) \leqslant \tilde{M})$. Důkaz pro $t(x)$ je ponechán čtenáři.

□

Věta 6.8. *Řady* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n g_n(x)$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n g_{n-1}(x)$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left[g_{n-1}(x) - g_n(x)\right]$ *stejnoměrně konvergují na každém* $[0,L]$.

Důkaz.

- $n g_n(x) \stackrel{[0,L]}{\leqslant} n K^{n+1} \frac{L^n}{n!} = K^{n+1} \frac{L^n}{(n-1)!}$ (Weierstrassovo kritérium)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} K^{n+1} \frac{L^n}{(n-1)!} \in \mathbb{R} \stackrel{W.K.}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} n g_n(x) \text{ SK na } [0,L].$$

- $n g_{n-1}(x) \leqslant n K^n \frac{L^{n-1}}{(n-1)!} = K \frac{(KL)^{n-1}}{(n-1)!} n$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(KL)^{n-1}}{(n-1)!} n \text{ konverguje (podílové krit.), protože } \lim_{n\to+\infty} \frac{(KL)^n}{n!} \frac{n+1}{n} \frac{(n-1)!}{(KL)^{n-1}} = 0 < 1$$

$\stackrel{W.K.}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n g_{n-1}(x)$ stejnoměrně konverguje na $[0,L]$.

- Rozdíl dvou stejnoměrně konvergentních řad je opět stejnoměrně konvergentní řada.

□

Kvazipoissonovské částicové systémy

- v Poissonovských systémech:

$$P[\eta_L = k] = \frac{(\lambda L)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda L} \Leftrightarrow h(x) = \Theta(x) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

- v dopravě to odpovídá extrémně nízkým hustotám (asi pod 5 aut na kilometr)

Definice 6.9. Řekneme, že ČS je **kvazipoissonovský**, pokud $\exists \lambda > 0$ tak, že platí:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists L_\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N}_0) \left(L > L_\varepsilon \Rightarrow \left| P[\eta_L = k] - \frac{(\lambda L_\varepsilon)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda L_\varepsilon} \right| < \varepsilon \right).$$

Věta 6.10. *Je-li ČS kvazipoissonovský, pak* $h(x) \in \mathscr{B}$.

Charakteristiky I. řádu pro BČS

I. Ve škálovaném BČS: $(\forall k \in \mathbb{N}_0)(\mathrm{E}(\mathcal{R}_k) = 1)$, protože $\int_{\mathbb{R}} x h(x)\mathrm{d}x = 1$.

II. $\mathrm{E}(\chi_k) = \int_{\mathbb{R}} x g_k(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x\Big(\ast_k\, h(x)\Big)\mathrm{d}x = k+1$, což plyne z vlastností konvoluce.

III. $\mathrm{E}(\eta_L) \neq L$

a) v Poissonovském systému

$$\mathrm{E}(\eta_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP[\eta_L = k] = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{L^k}{k!}\mathrm{e}^{-L} = L$$

b) v obecném systému:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\eta_L) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP[\eta_L = k] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\int_0^L g_{k-1}(x)\mathrm{d}x - \int_0^L g_k(x)\mathrm{d}x\right] = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^L k\,[g_{k-1}(x) - g_k(x)]\,\mathrm{d}x \overset{6.8}{=} \\
&\overset{6.8}{=} \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} k\,[g_{k-1}(x) - g_k(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^L \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k\,[g_{k-1}(x) - g_k(x)]\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^L \lim_{n\to+\infty}\,[g_0(x) - g_1(x) + 2g_1(x) - 2g_2(x) + \cdots + ng_{n-1}(x) - ng_n(x)]\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^L \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} g_k(x) - ng_n(x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^L\left(\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} ng_n(x)}_{=0}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^L \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)\mathrm{d}x \neq L
\end{aligned}$$

Definice 6.11. Definujeme $r(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ jako **shlukovou funkci BČS** (je omezená na každém $[0, L]$) a $\lambda(L) := \mathrm{E}(\eta_L)$ jako **trendovou funkci** (střední hodnota intervalové funkce).

Věta 6.12.

$$\lambda(L) = \int_0^L r(x)\mathrm{d}x$$

Hodnota $\lambda(L)$ závisí čistě na volbě $h(x)$ a na ničem jiném.

Věta 6.13. *V Poissonovských systémech platí, že*

$$\mathrm{E}(\mathcal{R}_0) = 1 \overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}} x h(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{E}(\eta_L) = L,$$

kde $h(x)$ je generátor BČS.

Poznámka 6.14. $h(x) \in \mathscr{B}_1 \;\wedge\; h(x) \in \mathscr{B}_{11}$

Věta 6.15. *Nechť je BČS zadán generátorem $h(x) \in \mathscr{B}$. Označme $H(s) = \mathfrak{L}[h(x)]$ a $R(s) = \mathfrak{L}[r(s)]$, kde $r(x)$ je příslušná shluková funkce. Pak platí:*

1. *Řada* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ *konverguje pro* $\forall x \in \mathbb{R}$, *tj.* $\mathrm{Dom}(r) = \mathbb{R}$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(r(x) \geqslant 0) \;\wedge\; (\forall x < 0)\big(r(x) = 0\big)$
3. $(\forall L > 0)(\lambda(L) = \mathrm{E}(\eta_L) = L \;\Leftrightarrow\; r(x) \sim \Theta(x))$
4. $\big(\forall s \in (0, +\infty)\big)\big(|H(s)| < 1\big)$
5. $\big(\forall s \in (0, +\infty)\big)\big(R(s) = \frac{H(s)}{1-H(s)}\big)$
6. $r(x)$ *je omezená na* $\mathbb{R}$ *a* $\lim\limits_{x \to +\infty} r(x) = 1$
7. $\mathbb{R}^+ \subset \mathrm{Dom}(R)$

Důkaz. 1. Již bylo dokázáno.

2. $r(x)$ je součtem nezáporných funkcí s pozitivním nosičem, což vyplývá ze vztahu $g_k(x) = \ast_k\, h(x)$, kde $h(x)$ má pozitivní nosič, tedy $\mathrm{supp}(h) \subset \mathbb{R}^+$.

3. $\Rightarrow$: $r(x) \sim \Theta(X) \;\Rightarrow\; \underbrace{\lambda(L) = \mathrm{E}(\eta_L)}_{\text{trendová funkce}} = \int\limits_0^L r(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^L \Theta(x)\mathrm{d}x = L$

   $\Leftarrow$:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^L r(x)\mathrm{d}x &= L \quad /\mathfrak{L} \\ \frac{\mathfrak{L}[r(x)]}{s} &= \frac{1}{s^2} \\ R(s) &= \frac{1}{s} \quad \text{/Lerchův teorém} \\ r(x) &\sim \Theta(x) \end{aligned}$$

4. $H(s) = \mathfrak{L}[h(x)] = \int\limits_0^{+\infty} h(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$. Sporem:

   $H(s) = 1 \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} h(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = 1 = \int\limits_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \underbrace{h(x)}_{\geqslant 0}\,\underbrace{\left[1 - \mathrm{e}^{-sx}\right]}_{\geqslant 0}\mathrm{d}x \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad \underbrace{h(x)}_{\not\sim 0}\,\underbrace{\left[1 - \mathrm{e}^{-sx}\right]}_{\not\sim 0} \sim 0 \;\; \text{SPOR!}$$

5. $g_k(x) = *_k\, h(x)$

$$R(s) = \mathfrak{L}[r(x)] = \mathfrak{L}\Big[\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)\Big] = \mathfrak{L}\Big[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathop{*}_k h(x)\Big] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathfrak{L}\Big[\mathop{*}_k h(x)\Big] =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=0}^{k+1} \mathfrak{L}[h(x)] = \sum_{k=0}^{+\infty} H^{k+1}(s) = \frac{H(s)}{1-H(s)}$$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = \lim\limits_{s\to 0+} sR(s)$ - (z vlastností Laplaceovy transformace).

$$\lim_{s\to 0+} sR(s) = \lim_{s\to 0+} \frac{sH(s)}{1-H(s)} \overset{H(0)=1\ (L'H)}{=\!=\!=\!=} \lim_{s\to 0+} \frac{H(s)+sH'(s)}{-H'(s)} \overset{H'(0)=-\mu}{=\!=\!=} \frac{1+0\cdot(-\mu_1)}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_1} = 1$$

7. Vyplývá z výše dokázaných bodů.

$\square$

Poznámka 6.16. Jak toho využít k výpočtu trendové funkce?

$$\mathfrak{L}[\lambda(L)] = \mathfrak{L}\Big[\int_0^L r(x)\mathrm{d}x\Big] = \frac{\mathfrak{L}[r(x)]}{s} = \frac{R(s)}{s} = \frac{1}{s}\cdot\frac{H(s)}{1-H(s)} \;\Rightarrow\; \lambda(L) = \mathfrak{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s}\cdot\frac{H(s)}{1-H(s)}\Big]$$

Věta 6.17. *Lineární asymptota trendové funkce stoupá pod úhlem* 45° *a její intercept je roven číslu* $\kappa = \frac{1}{2}\mu_2 - 1$.

Důkaz. $\mu_2 = \mu_2(h)$ lineární asymptota: $y = kx + q$, $k = \operatorname{tg}\alpha$ a q je tzv. intercept. Chceme ukázat, že $k = 1$ a $q = \frac{\mu_2}{2} - 1$. Víme, že $\lambda(0) = 0$ a $\lambda(L)$ je neklesající na $\mathbb{R}^+$.

$$\lambda(L) = \int_0^L r(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathfrak{L}[\lambda(L)] = \frac{1}{s}\cdot\frac{H(s)}{1-H(s)}$$

$$\mathfrak{L}[kL+q] = \frac{k}{s^2} + \frac{q}{s}$$

$$\frac{k}{s^2} + \frac{q}{s} \doteq \frac{1}{s}\cdot\frac{H(s)}{1-H(s)} \qquad \leftarrow \text{asymptotika (pro velká L)}$$

$k + qs \doteq \frac{1}{s}\cdot\frac{sH(s)}{1-H(s)}$, kde k a qs jsou první 2 členy Maclaurinova rozvoje.

$$\Omega(s) = \frac{sH(s)}{1-H(s)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Omega^{(k)}(0)}{k!}s^k = \underbrace{\Omega(0)}_{k} + \underbrace{\Omega'(0)}_{q=\kappa}\cdot s + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\Omega^{(k)}(0)}{k!}s^k$$

$$k = \Omega(0) = \lim_{s\to 0+} \frac{sH(s)}{1-H(s)} = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = \operatorname{arctg} k = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$$

$$\kappa = \Omega'(0) = \lim_{s\to 0+}\Big(\frac{sH(s)}{1-H(s)}\Big)' = \lim_{s\to 0+} \frac{[H(s)+sH'(s)](1-H(s)) + sH(s)H'(s)}{(1-H(s))^2} =$$
$$= \lim_{s\to 0+} \frac{H(s) - H^2(s) + sH'(s)}{(1-H(s))^2} = \left|\begin{array}{l} H(0)=1 \\ H'(0)=1 \end{array}\right| \overset{L'H}{=\!=} \ldots \overset{L'H}{=\!=} \ldots = \frac{\mu_2}{2} - 1$$

Pro Poissonovský systém jsme ukázali, že $\lambda(L) = L$.

$$k = 1: \quad \kappa = \frac{\mu_2}{2} - 1 = 0, \quad \text{protože} \quad \mu_2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^2 \mathrm{d}x = 2$$

□

Charakteristiky druhého řádu

$h(x)....\mu_2(h),\ \mathrm{D}(\mathcal{R}_0) = \mu_2 - 1$

Definice 6.18. Definujeme

1. **druhý moment intervalové frekvence** vztahem
$$\mathrm{E}(\eta_L^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathrm{P}[\eta_L = k],$$
2. **frekvenční rozptyl** (number variance) jako
$$\square(L) = \mathrm{E}\big(\eta_L - \mathrm{E}(\eta_L)\big)^2$$
3. **statistickou rigiditu** jako
$$\triangle(L) = \mathrm{E}(\eta_L - L)^2$$

Věta 6.19. *Platí, že*

$$\begin{aligned}
\square(L) &= \mathrm{E}(\eta_L^2) - 2\mathrm{E}^2(\eta_L) + \mathrm{E}^2(\eta_L) = \mathrm{E}(\eta_L^2) - \mathrm{E}^2(\eta_L)\\
\triangle(L) &= \mathrm{E}(\eta_L^2) + 2\mathrm{E}(\eta_L \cdot L) + L^2 = \mathrm{E}(\eta_L^2) - 2L\mathrm{E}(\eta_L) + L^2\\
\square(L) - \triangle(L) &= -\mathrm{E}^2(\eta_L) + 2L\mathrm{E}(\eta_L) - L^2 = -(\mathrm{E}(\eta_L) - L)^2\\
\triangle(L) - \square(L) &= (\lambda(L) - L)^2
\end{aligned}$$

Statistická rigidita

$$\triangle(L) = \mathrm{E}(\eta_L - L)^2 = \mathrm{E}(\eta_L^2) - 2L\lambda(L) + L^2$$

$$\mathrm{E}(\eta_L^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \mathrm{P}[\eta_L = k] = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \Big(\int_0^L g_{k-1}(x)\mathrm{d}x - \int_0^L g_k(x)\mathrm{d}x\Big) = \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 g_{k-1}(x)\mathrm{d}x - \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 g_k(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 g_{k-1}(x)\mathrm{d}x - \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)^2 g_{k-1}(x)\mathrm{d}x = \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} [k^2 - k^2 + 2k - 1] g_{k-1}(x)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_0^L \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} (k-1+1) g_{k-1}(x)}_{s(x)} \mathrm{d}x - \int_0^L \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} g_{k-1}(x)}_{r(x)} \mathrm{d}x = 2\int_0^L \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) g_{k-1}(x)}_{s(x)\ \text{shluk. fce I. druhu}} \mathrm{d}x + \int_0^L \sum_{k=1}^{+\infty} g_{k-1}(x)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_0^L \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} k g_k(x)}_{s(x)} \mathrm{d}x + \int_0^L \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)}_{r(x)} \mathrm{d}x$$

Věta 6.20. *Platí, že $s(x) = (r * r)(x)$.*

$$(r * r)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) * \sum_{l=0}^{+\infty} g_l(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} (g_k * g_l)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} g_{k+l+1}(x) =$$

$$= g_1(x) + 2g_2(x) + 3g_3(x) + ... = \sum_{m=0}^{+\infty} m g_m(x) = s(x)$$

Důsledek 6.21. $\mathrm{E}(\eta_L^2) = 2\int_0^L (r * r)(x)\mathrm{d}x + \int_0^L r(x)\mathrm{d}x$ - *závisí pouze na $r(x)$ a to závisí pouze na generátoru $h(x) \in \mathscr{B}$.*

Lemma 6.22. *V libovolném BČS platí, že $\mathrm{E}(\eta_L^2) = 2r(L) * \lambda(L) + \lambda(L)$.*

Důkaz. Trendová funkce: $\lambda(L) = \mathrm{E}(\eta_L) = \int_0^L r(x)\mathrm{d}x$ a $\mathfrak{L}\Big[\int_0^L (r * r)(x)\mathrm{d}x\Big] = \frac{\mathfrak{L}[(r*r)]}{s} = \frac{R^2(s)}{s}$ a $\mathfrak{L}[r(L) * \lambda(L)] = R(s)\frac{R(s)}{s}$. □

Statistická rigidita v Poissonově BČS

$$\triangle(L) = \mathrm{E}(\eta_L^2) - 2L\lambda(L) + L^2$$

- v poissonovském systému: $h(X) = \Theta(x)\mathrm{e}^{-x}$ a $\lambda(L) = L$.

$$R(s) = \mathfrak{L}[r(x)] = \frac{H(s)}{1 - H(s)}, \quad H(s) = \mathfrak{L}[\Theta(x)\mathrm{e}^{-x}] = \frac{1}{s+1}$$

$$R(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 - \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad r(x) = \Theta(x)$$

$$\mathrm{E}(\eta_L^2) = 2r(L) * \lambda(L) + \lambda(L) = 2\int_0^L \Theta(x) \cdot (L - x)\mathrm{d}x + L = 2\Big[Lx - \frac{x^2}{2}\Big]_0^L + L = 2\big(L^2 - \frac{L^2}{2}\big) + L = L^2 + L$$

$$\Rightarrow \quad \triangle(L) = L^2 + L - 2L^2 + L^2 = L$$

Laplaceův obraz statistické rigidity

$$\triangle(L) = 2r(L) * \lambda(L) + \lambda(L) - 2L\lambda(L) + L^2 \quad /\mathfrak{L}$$

$$\mathfrak{L}[\triangle(L)] = 2R(s)\mathfrak{L}[\lambda(L)] + \mathfrak{L}[\lambda(L)] + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathfrak{L}[\lambda(L)] + \frac{2}{s^3}$$

$$\mathfrak{L}[\triangle(L)] = 2\frac{R^2(s)}{s} + \frac{R(s)}{s} + 2\Big(\frac{R(s)}{s}\Big)' + \frac{2}{s^3} \quad /s^3$$

$$s^3\mathfrak{L}[\triangle(L)] = R(s)s^2\Big(2R(s) + 1\Big) + 2s\Big(sR'(s) - R(s)\Big) + 2$$

$$s^3\mathfrak{L}[\triangle(L)] = 2\big(1 - sR(s)\big) + s^2\big(2R'(s) + R(s) + 2R^2(s)\big)$$

Nyní použijeme vztahy $H(s) = \mathfrak{L}[h(x)]$, $R(s) = \frac{H(s)}{1-H(s)}$ a $R'(s) = \frac{H'(1-H)+HH'}{\left(1-H\right)^2} = \frac{H'(s)}{\left(1-H(s)\right)^2}$ a dostaneme

$$s^3\mathfrak{L}[\triangle(L)] = 2 + sH(s)\cdot\frac{s-2}{1-H(s)} + 2s^2\frac{H^2(s)+H'(s)}{\left(1-H(s)\right)^2},$$

což je statistická rigidita vyjádřená pomocí generátoru $h(x) \in \mathscr{B}$.

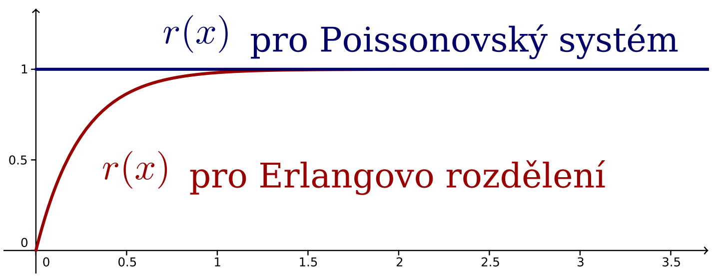
Příklad 6.23. Mějme $h(x) = 4\Theta(x)x\mathrm{e}^{-2x}$ (Erlangovo rozdělení). Chceme spočítat $H(s)$, $R(s)$, $r(x)$ a $\lambda(x)$.

$$H(s) = \mathfrak{L}[h(x)] = \mathfrak{L}[4\Theta(x)x\mathrm{e}^{-2x}] = \frac{4}{(s+2)^2}$$

$$R(s) = \frac{H(s)}{1-H(s)} = \frac{\frac{4}{(s+2)^2}}{1-\frac{4}{(s+2)^2}} = \frac{4}{(s+2)^2-4} = \frac{4}{s^2+4s}$$

$$r(x) = \mathfrak{L}^{-1}[R(s)] = \mathfrak{L}^{-1}\Big[\frac{4}{s^2+4s}\Big] = \mathfrak{L}^{-1}\Big[\frac{-1}{s+4}+\frac{1}{s}\Big] = -\Theta(s)\mathrm{e}^{-4x} + \Theta(x) = \Theta(x)\big(1-\mathrm{e}^{-4x}\big)$$

$$\lambda(x) = \int_0^x r(y)\mathrm{d}y = \int_0^x (1-\mathrm{e}^{-4y})\mathrm{d}y = x + \Big[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4y}\Big]_0^x = x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{E}(\eta_L)$$



Statistická rigidita:

$$\lambda(x) = x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x}$$

$$R^2(s) = \frac{16}{(s^2+4s)^2} = \frac{16}{s^2(s^2+8s+16)} = -\frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+4} + \frac{1}{(s+4)^2}$$

$$(r*r)(x) = \Theta(x)\Big(-\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x} + x\mathrm{e}^{-4x}\Big)$$

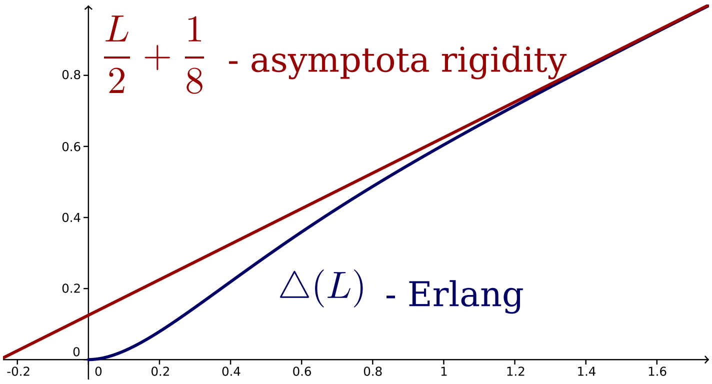
$$\int_0^L -\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x} + x\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x = -\frac{L}{2} + \frac{L^2}{2} + [-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-4x}]_0^L + [-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-4x}]_0^L + \frac{1}{16}[-\mathrm{e}^{-4x}] =$$

$$= -\frac{L}{2} + \frac{L^2}{2} - \frac{3}{16}(\mathrm{e}^{-4L}-1) - \frac{1}{4}L\mathrm{e}^{-4L}$$

$$\triangle(L) = \Big(-\frac{L}{2} + \frac{L^2}{2} - \frac{3}{16}(\mathrm{e}^{-4L}-1) - \frac{1}{4}L\mathrm{e}^{-4L}\Big)\cdot 2 + L - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4L} - 2L\Big(L - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4L}\Big) + L^2 =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{L}{2} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-4L} - L\mathrm{e}^{-4L}$$

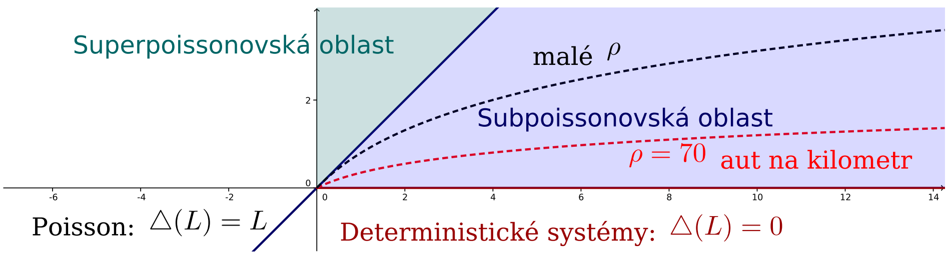
Graf statistické rigidity



Všechny grafy SR mají lineární asymptotu

$$\triangle(L) \doteq \chi L + \kappa,$$

kde χ je statistická kompresibilita a κ je intercept. Jak určit kompresibilitu a intercept?



$$\begin{aligned}
\triangle(L) &= \chi L + \kappa \quad \text{(pro velká)}L \\
\mathfrak{L}[\triangle(L)] &\doteq \frac{\chi}{s^2} + \frac{\kappa}{s} \quad \text{(pro malá } L) \\
\chi s + \kappa s^2 &\doteq \underbrace{2 + sH(s)\frac{s-2}{1-H(s)} + 2s^2\frac{H^2(s)+H'(s)}{\left(1-H(s)\right)^2}}_{\Omega(s)}
\end{aligned}$$

Víme, že $\chi s + \kappa s^2 \doteq \Omega(s)$ a $\Omega(0) = 0$.

$$\Omega(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Omega^{(k)}(0)}{k!} s^k \quad \Rightarrow \quad \chi = \Omega'(0) \ \wedge \ \kappa = \frac{1}{2}\Omega''(0)$$

Pro Erlangovo rozdělení:

$$H(s) = \frac{4}{(s+2)^2} \quad \Rightarrow \quad H'(s) = -\frac{8}{(s+2)^3}, \quad \frac{H(s)}{1-H(s)} = \frac{4}{s^2+4s}$$

$$\begin{aligned}
\Omega(s) &= 2 + s(s-2)\frac{4}{s^2+4s} + 2s^2\Big(\frac{16}{(s^2+4s)^2} - \frac{8}{(s+2)^3}\cdot\frac{1}{\big(1-\frac{4}{(s+2)^2}\big)^2}\Big) = \\
&= 2 + \frac{4s(s-2)}{s^2+4s} + 2s^2\Big(\frac{16}{(s^2+4s)^2} - \frac{8(s+2)}{(s^2+4s)^2}\Big) = \frac{6s^2}{s^2+4s} - 2s^2\frac{8s}{(s^2+4s)^2} = \\
&= \frac{6s^4+24s^3-16s^3}{(s^2+4s)^2} = s^3\frac{6s+8}{(s^2+4s)^2} = s\frac{6s+8}{(s+4)^2}, \quad \Omega(0) = 0 \\
\Omega'(s) &= \frac{(12s+8)(s+4)^2 - (6s^2+8s)2(s+4)}{(s+4)^4}, \quad \Omega'(0) = \frac{8\cdot 4^2 - 0}{4^4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dále by se dalo ukázat, že $\Omega''(0) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{1}{8}$

7 Aproximace integrálů Laplaceova typu

Jedná se o integrály ve tvaru

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{tf(x)}\mathrm{d}x \triangleq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{h(x)+tf(x)}\mathrm{d}x.$$

Předpokládáme, že

1. $g(x) \geqslant 0$ *s.v.* v $\mathbb{R}$
2. $h(x) + tf(x)$ je analytická v bodech globálního maxima funkce $f(x)$
   (typicky $\operatorname{argmax} f(x) = a$)

7.1 Hrubý leading

Ukazuje, že čím větší je t, tím jsou pro hodnotu integrálu $H(t)$ více rozhodující místa, kde $f(x)$ nabývá svého maxima

Věta 7.1 (O hrubém leadingu)**.** *Nechť $f(x), g(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou měřitelnými funkcemi na (a,b), kde $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$. Nechť $f(x)$ je omezena na (a,b). Označme $S = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ a $H(x) = \int_a^b g(x)\mathrm{e}^{tf(x)}\mathrm{d}x$. Nechť dále existuje $t_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $g(x)\mathrm{e}^{t_0 f(x)} \in \mathscr{L}(a,b)$. Pak $g(x)\mathrm{e}^{-t(S-f(x))} \in \mathscr{L}_1(a,b)$ a platí, že*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-St}H(t) = \int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x,$$

kde $\omega(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pro taková } x \in (a,b), \text{ kde } f(x) = S, \\ 0 & \text{pro taková } x \in (a,b), \text{ kde } f(x) < S. \end{cases}$

Důkaz. Pro $t > t_0$ platí, že

$$\mathrm{e}^{-St}H(t) = \int_a^b \mathrm{e}^{-St}g(x)\mathrm{e}^{tf(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{e}^{t_0 f(x)}\mathrm{e}^{(t-t_0)[f(x)-S]}\mathrm{e}^{-St_0}\mathrm{d}x.$$

Snahou je zaměnit limitu a integrál (viz MAB4). K tomu potřebujeme splnit 3 předpoklady:

1. Limita integrandu jistě existuje, je jí

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-St}g(x)\mathrm{e}^{tf(x)} = \lim_{t\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\overbrace{(S-f(x))}^{\geqslant 0}t} = \begin{cases} O & x \in (a,b) : \ f(x) < S \\ g(x) & x \in (a,b) : \ f(x) = S \end{cases} \triangleq \omega(x)$$

2. Měřitelnost integrandu je splněna.
3. Existuje integrabilní majoranta k integrandu nezávislá na t:

$$\left|g(x)\mathrm{e}^{-St}\mathrm{e}^{tf(x)}\right| \leqslant \left|\underbrace{g(X)\mathrm{e}^{t_0 f(x)}}_{\text{předpoklad}}\underbrace{\mathrm{e}^{-St_0}}_{\text{konst}}\right| \in \mathscr{L}(a,b)$$

Operace tedy můžeme zaměnit a platí, že

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-St}H(t) = \int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x$$

a ze srovnávacího kritéria navíc

$$\left|g(X)\mathrm{e}^{-(S-f(x))t}\right| \leqslant \left|g(x)\mathrm{e}^{t_0 f(x)}\mathrm{e}^{-St_0}\right| \in \mathscr{L}(a,b).$$

Z teorie Lebesgueova integrálu víme, že $\quad f(x)\mathscr{L} \Leftrightarrow |F(x)| \in \mathscr{L}, \quad$ proto i

$$g(x)\mathrm{e}^{t_0 f(x)}\mathrm{e}^{-St_0} \in \mathscr{L}_1(a,b).$$

$\square$

Důsledek 7.2. *Pro asymptotiku integrálů Laplaceova typu jsou podstatná okolí těch bodů, v nichž $f(x)$ dosahuje maxima.*

7.2 Laplaceova metoda

Z metody hrubého leadingu vidíme, že pro velká t hrají v integrandu $g(x)\mathrm{e}^{tf(x)}$ nejvýznamnější roli okolí bodů $\operatorname{argmax} f(x)$. Pokud $a = \operatorname{argmax} f(x)$ a funkce $h(x) + tf(x)$ je v a analytická, pak $\forall x \in U_\delta(a)$ platí:

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{tf(x)}\mathrm{d}x, \\ g(x)\mathrm{e}^{tf(x)} &\doteq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\mathrm{e}^{tf(a)+\frac{1}{2}tf''(a)(x-a)^2}. \end{aligned}$$

Následující úvahy platí pouze pro ty případy, kdy $f''(a) < 0$. Protože je ale bod $a \in \mathbb{R}$ bodem lokálního minima a $f(x) \in \mathcal{C}^\infty\big(U_\delta(a)\big)$, lze předpoklad $f''(a)$ naplnit téměř vždy. Pozor ale na situace, kdy $f''(a) = 0$ (extrémy vyšších řádů). Pomocné výpočty:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\alpha(x-\beta)^2}\mathrm{d}x = \left|\alpha > 0\right| = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \Big/ \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\alpha^m}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (x-\beta)^{2m}\mathrm{e}^{-\alpha(x-\beta)^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x^{2m}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2m+1}}}\frac{(2m-1)!!}{2^m}$$

$$H(t) \doteq \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \mathrm{e}^{tf(a)+\frac{t}{2}f''(a)(x-a)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \text{integrály s lichými} \\ \text{mocninami } (x-a) \text{ vypadnou} \end{array} \right| =$$

$$= \mathrm{e}^{tf(a)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{g^{(2m)}(a)}{(2m)!} \int_{\mathbb{R}} (x-a)^{2m} \mathrm{e}^{\frac{t}{2}f''(a)(x-a)^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{tf(a)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{g^{(2m)}}{(2m)!} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(a)|^{2m+1}}} \frac{(2m-1)!!}{2^m t^m} =$$

$$= \mathrm{e}^{tf(a)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{g^{(2m)}(a)}{t^m(2m)!!} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{t!f''(a)}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^m}{|f''(a)|^m} = \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(a)|}} \mathrm{e}^{tf(a)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{g^{(2m)}(a)}{2^m(2m)!!} \frac{1 \cdot \frac{1}{t^m}}{|f''(a)|^m} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(a)|}} \mathrm{e}^{tf(a)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{g^{(2m)}(a)}{|f''(a)|^m} \frac{\frac{1}{t^m}}{(4m)!!!!} \doteq \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(a)|t}} \mathrm{e}^{tf(a)} g(a)$$

7.3 Aproximace v $\varkappa$dlovém bodě = Metoda nejprudšího sestupu

Jde o aproximaci vztahu vzešlého z věty o Laplaceově inverzi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{e}^{sx}\mathrm{d}s.$$

Předpoklady o $F(s)$:

- $\exists \alpha > 0$ tak, že $F(s)$ je holomorfní na polorovině $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ (má komplexní derivaci, která je také holomorfní) (holomorfní funkce jsou třídy $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow$ mají Taylora)
- $\exists \beta, \gamma > 0$ tak, že $\mathrm{Re}(s) > \alpha \wedge |s| > \gamma \ \Rightarrow \ |f(s)| \leqslant \frac{\beta}{|s|^2}$
- číslo c (větší než α) může být voleno libovolně

V integrálu se jedná o integraci přes křivku $\varphi(x) = c + \mathrm{i}x, \ x \in (-\infty, +\infty)$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{\ln F(s)}\mathrm{e}^{sx}\mathrm{d}s \triangleq \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{H(s)+sx}\mathrm{d}s,$$

kde $H(s) = \ln F(s)$, proto $F(s) \overset{!}{>} 0$.
Za c volíme stacionární bod integrandu $I(s) = \mathrm{e}^{H(s)+sx}$, který je de facto sedlovým bodem. (díky naplnění Cauchyových podmínek je Hessova matice vypočtená ve stacionárním bodě vždy indefinitní)
Integrál z věty o Laplaceově inverzi je nezávislý na hodnotě $c \in \mathbb{R}$, je-li integrand $I(s)$ holomorfní funkcí na křivce $\varphi(x) = c + \mathrm{i}x$. Označme D sedlový bod funkce $I(s)$ ležící v polorovině

$\mathrm{Re}(s) > \alpha$ (pokud je jich více, bereme ten s nejvyšší funkční hodnotou).

$$f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{D-\mathrm{i}\infty}^{D+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{H(s)+sx} \mathrm{d}s = \left| \begin{array}{l} \text{Taylorův rozvoj} \\ \text{exponentu} \\ \text{integrandu} \end{array} \right| \doteq \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{D-\mathrm{i}\infty}^{D+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{H(D)+Dx+\frac{1}{2}H''(D)(s-D)^2} \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{H(D)+Dx}}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{D-\mathrm{i}\infty}^{D+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{H''(D)\frac{(s-D)^2}{2}} \mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} s - D = q \\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}q \end{array} \right| = \frac{F(D)\mathrm{e}^{Dx}}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{H''(D)\frac{q^2}{2}} \mathrm{d}q =$$

$$= \left| \begin{array}{c} H''(D) = |H''(D)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} \\ q = |q|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu} \end{array} \right| = \frac{F(D)\mathrm{e}^{Dx}}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{|H''(D)|\cdot|q^2|\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\mu}} \mathrm{d}q =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Změna tvaru dráhy integrace:} \\ \omega + 2\mu \stackrel{!}{=} \pi \\ \text{(zůstáváme v oblasti holomorfnosti)} \end{array} \right| = \frac{F(D)\mathrm{e}^{Dx}}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|H''(D)|\cdot|q|^2} \mathrm{d}q = \left| \begin{array}{c} q = \mathrm{i}\xi \\ \mathrm{d}q = \mathrm{i}\mathrm{d}\xi \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \mathrm{Re}(q) = 0 \Rightarrow \\ \mathrm{Im}(\xi) = 0 \end{array} \right| = \frac{F(D)\mathrm{e}^{Dx}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{|H''(D)|}{2}\xi^2} \mathrm{d}\xi = \frac{F(D)\mathrm{e}^{Dx}}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{|H''(D)|}} = \frac{F(D)\mathrm{e}^{Dx}}{\sqrt{2\pi|H''(D)|}}$$

Závěr:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{e}^{sx} \mathrm{d}s = \frac{F(D)\mathrm{e}^{Dx}}{\sqrt{2\pi|H''(D)|}}, \text{ kde}$$

$$H(s) = \ln F(s),$$

$$H'(D) = \left. \frac{F'(s)}{F(s)} \right|_{s=D} \stackrel{!}{=} 0.$$