Obsah

1 Motivace a výchozí uvedení do problematiky **5**
1.1 Klasifikace systémů podle míry náhodnosti . . . 5
1.2 Výběrový prostor . . . 7
1.3 Klasifikace podle rozsáhlosti výběrového prostoru . . . 7
1.4 Pestrost pravděpodobnostních dotazů . . . 8
1.5 Obecné vlastnosti pravděpodobnosti – intuitivní zavedení . . . 9
1.6 Pravděpodobnostní míra – rigorózní zavedení . . . 10
1.7 Jevy a jejich množinová interpretace . . . 11
1.8 Odvozené vlastnosti pravděpodobnosti . . . 12

2 Distribuční funkce a její vlastnosti **13**
2.1 Zavedení distribuční funkce náhodné proměnné . . . 13
2.2 Základní vlastnosti distribuční funkce . . . 15
2.3 Pravděpodobnosti intervalů a bodových množin . . . 17
2.4 Úvahy o množinách nulové pravděpodobnosti . . . 20

3 Diskrétní náhodná proměnná a její charakteristiky **23**
3.1 Pravděpodobnostní tabulka . . . 23
3.2 Deskriptivní charakteristiky . . . 23
3.3 Frekventovaná diskrétní rozdělení . . . 25

4 Absolutně spojitá náhodná proměnná a její charakteristiky **31**
4.1 Hustota pravděpodobnosti . . . 31
4.2 Absolutně spojitá náhodná proměnná . . . 32
4.3 Deskriptivní charakteristiky . . . 34
4.4 Nejznámější varianty spojitých proměnných . . . 35
4.5 Sumář deskriptivních charakteristik . . . 42
4.6 Grafická vizualizace náhodných proměnných . . . 44

5 Operace s náhodnými veličinami **47**
5.1 Afinní transformace náhodné proměnné . . . 47
5.2 Pravděpodobnostní popis náhodného vektoru . . . 50
5.3 Součet náhodných proměnných . . . 51
5.4 Transformace náhodné proměnné . . . 53

PŘEDMLUVA

Toto skriptum bylo vytvořeno jako hlavní učební text pro předmět Úvod do pravděpodobnosti 2, vyučovaný na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské Českého vysokého učení technického v Praze.

Notace, použité symboly a jejich význam

Symbol	**Význam**
$\wedge$	a zároveň (konjunkce)
$\vee$	nebo (disjunkce)
$\Longrightarrow$	z výroku vlevo plyne výrok vpravo (implikace)
$\Longleftrightarrow$	vzájemně ekvivalentní výroky (ekvivalence)
$\mathbf{N}$	množina přirozených čísel $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbf{Z}$	množina celých čísel $\mathbf{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \ldots\}$
$\hat{k}$	množina prvních k přirozených čísel, tj. $\hat{k} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, k\}$
$\mathbf{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbf{R}$	množina reálných čísel
$\Theta(x)$	Heavisideova funkce (jednotkový skok)
	$\Theta(x) = 1$ pro nezáporná x a $\Theta(x) = 0$ pro záporná x
$\Theta^\star(x)$	alternativní Heavisideova funkce: $\Theta^\star(x) = 1 - \Theta(-x)$
	$\Theta^\star(x) = 1$ pro kladná x a $\Theta^\star(x) = 0$ pro nekladná x
soustava množin	množina, jejimiž prvky jsou množiny
kardinální číslo	počet prvků množiny
$\lvert A \rvert$	kardinální číslo množiny A
$\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}, \ldots$	náhodné proměnné (jevy, experimenty, procesy, apod.)
$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A]$	pravděpodobnost, že výsledkem jevu $\mathbb{X}$ je hodnota z množiny A
$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \ = ?$	pravděpodobnostní dotaz
$\mathrm{Dom}(g)$	definiční obor zobrazení/funkce g
$\mathrm{Ran}(g)$	obor hodnot zobrazení/funkce g
$A \cap B$	průnik množin
$A \cup B$	sjednocení množin
$A \setminus B$	rozdíl množin
$A \uplus B$	disjunktní sjednocení množin, kdy $A \cap B = \emptyset$
$[g(x)]_a$	délka skoku funkce $g(x)$ v bodě a
	$[g(x)]_a = \lim_{x \to a_+} g(x) - \lim_{x \to a_-} g(x)$

Kapitola 1

Motivace a výchozí uvedení do problematiky

Základní tématikou, jíž se zaobírají tato skripta, je problematika statistického popisu systémů, které nejsou deterministické, ale vykazují buď jemné, nebo i značně výrazné rysy náhodného uspořádání. Hovoříme o nich jako o systémech stochastických. Při popisu takových systémů nevystačíme, jak je zcela zřejmé, s aparátem běžně užívaným při studiu klasických systémů, protože každá z popisných veličin může s jistou pravděpodobností nabývat pestré škály hodnot. Proto je nezbytné přejít k osvědčeným instrumentům matematické pravděpodobnosti a statistiky, tj. axiomaticky vybudované matematické disciplíny vystavěné na pilířích matematické analýzy a lineární algebry.

1.1 Klasifikace systémů podle míry náhodnosti

Pro bližší objasnění klasifikace systémů podle míry náhodnosti nyní upřesňujeme, že systém (typicky fyzikální, biologický, ekonomický či sociální) je označen za **deterministický,** pokud lze na základě údajů o počátečním uspořádání elementů (těles, buněk, sektorů či jedinců) tohoto systému jednoznačně stanovit, v jakém stavu se bude systém nacházet v blízkém (někdy i dalekém) budoucnu. Reprezentantem takového systému je například systém několika těles navzájem propojených pružinami a pohybujících se ve vakuu. Při znalosti počátečních poloh a rychlostí těchto těles a při znalosti dalších parametrů systému (zde např. tuhostí použitých pružin) lze se stoprocentní jistotou určit stav systému v libovolném čase t, tedy lokace a okamžité rychlosti všech těles.

Naproti tomu **stochastický systém** je charakteristický tím, že ani při znalosti detailního a kompletního silového (nebo obecně interakčního) působení mezi elementy systému není možno predikovat výsledný stav systému jinak než s použitím pravděpodobnostního popisu. Zástupcem takového systému je například systém mnoha vzájemně propojených kuliček ponořených do kapaliny. Ačkoli je silové působení mezi každými dvěma kuličkami relativně snadno popsatelné, rušivé účinky molekul vodní lázně z něj vytvářejí systém náhodný. Analogicky lze za stochastické systémy prohlásit také systémy, které jsou – ač původně deterministické – rušeny různými náhodnými vlivy, popř. systémy, v nichž je interakce mezi součástmi komplikovaná, nestabilní nebo nahodilá. Mezi takovéto systémy lze typicky zahrnout pohyb těles v reálném odporujícím prostředí, vývoj akcií na burze, neuspořádaný pohyb buněk nebo molekul kapalin a plynů, proud vozidel či pohybující se dav chodců. Stanovovat analytické předpovědi pro deterministický systém tedy znamená určit přesný stav systému v daném čase, tj. vypočítat

přesné hodnoty fázových veličin (poloh, hybností, rychlostí, atd). Naproti tomu ve stochastických systémech reprezentují analytické předpovědi snahu kvantifikovat pravděpodobnosti, s jakými nastanou všechny přípustné stavy daného systému. V těchto systémech je typickým výstupem řešení pravděpodobnost, že daná stavová veličina – označme ji symbolem $\mathbb{X}$ – (například akcie společnosti Apple) nabude hodnot z množiny A (což může být například interval mezi \$115 a \$125). Takové a podobné pravděpodobnosti budeme zapisovat ve formalizovaném tvaru

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A], \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle 115, 125 \rangle], \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{1, 3, 5\}], \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} < a],$$

kde $\mathbb{X}$ budeme nazývat **náhodnou veličinou (proměnnou).** Úlohu na vyčíslení pravděpodobnosti zadanou ve tvaru

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \ = ? \tag{1.1}$$

budeme nazývat **pravděpodobnostním dotazem.**

1.1.1 Úloha – francouzská ruleta

V této úloze se pokusíme matematickým pohledem analyzovat náhodný jev, jenž je základem hazardní hry s názvem francouzská ruleta. Základem rulety je otáčivé zařízení, které se skládá ze dvou soustředných kol. Větší z nich je nehybné. Menší je pohyblivé a bývá rozděleno na 37 obarvených polí očíslovaných čísly od 0 do 36. Hráči sází typicky na konkrétní číslo nebo barvu políčka, do kterého si myslí, že kulička padne. Komplikovanější sázky však připouštějí vsadit i na různé další varianty výsledku. Typické příklady sázek jsou tyto:

- Sázky na jedno číslo: Hráč vsází na kterékoliv číslo včetně nuly. V případě výhry je vyplacen 35násobek vsazené částky.
- Červená nebo černá barva: Hráč typuje barvu políčka. V případě výhry je vyplacen dvojnásobek vsazené částky.
- Sudá nebo lichá: Hráč typuje, zda výsledkem bude sudé nebo liché číslo. V případě výhry je vyplacen dvojnásobek vsazené částky. Pokud padne nula, výhra se nevyplácí.
- Malá čísla: Hráč vsází na to, že padne některé z čísel 1–18. V případě výhry je vyplacen dvojnásobek vsazené částky.
- Vysoká čísla: Hráč vsází na to, že padne některé z čísel 19–36. Výhra je opět dvojnásobek vsazené částky.
- Třetiny: Vsází se, zda kulička padne do první třetiny (čísla 1–12), druhé třetinu (čísla 13–24) nebo třetí třetiny (čísla 25–36). V případě výhry je vyplacen třínásobek vsazené částky.
- Sloupce: Jedná se buď o sázku na horní řadu (čísla dělitelná třemi), nebo prostřední řadu (čísla dělitelná třemi se zbytkem 2), případně dolní řadu (čísla dělitelná třemi se zbytkem 1). Výhrou je opět třínásobek vsazené částky.

Pokuste se nyní ke každé z výše zmíněných sázek vytvořit příslušný pravděpodobnostní dotaz a vyčíslit hodnotu jeho výsledku.

1.2 Výběrový prostor

Charakteristickým rysem každého náhodného procesu, tj. každé náhodné veličiny, je množina všech přípustných výsledků, tj. všech, které mohou být při realizaci příslušného náhodného experimentu dosaženy. Hovoříme o tzv. **výběrovém prostoru.** V těchto skriptech ho budeme značit písmenem E. Pohledem teorie míry, která s danou problematikou úzce souvisí (jak uvidíme později), lze tuto množinu ztotožnit s tak zvaným **množinovým prezidentem.** Na základě elementárních vlastností pravděpodobnosti bude vždy platit, že pravděpodobnost, že výsledkem náhodného experimentu bude některá z hodnot výběrového prostoru, vždy rovna jedné. To tedy značí, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in E] = 1.$$

Hovoříme o **normalizaci pravděpodobnosti.** V úloze 1.1.1 je takovým výběrovým prostorem množina $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 36\}$. Jednotlivé prvky výběrového prostoru se obvykle nazývají **elementárními jevy.**

Předpokládejme, že $\mathscr{B}$ je soustava, jejimiž prvky jsou množiny. Říkáme, že $\mathscr{B}$ je soustavou množin. Množinu $E \in \mathscr{B}$ nazveme **prezidentem soustavy** $\mathscr{B}$, pokud jsou všechny ostatní množiny soustavy $\mathscr{B}$ její podmnožinou, tj. $\forall A \in \mathscr{B} : \ A \subset E$. Není těžké ukázat, že každá soustava má nejvýše jednoho prezidenta. Existují tudíž i soustavy, které prezidenta nemají.

1.3 Klasifikace podle rozsáhlosti výběrového prostoru

Náhodné jevy (proměnné) obvykle rozdělujeme podle počtu všech přípustných hodnot, které mohou být výsledkem zkoumaného náhodného procesu, tj. – odborně řečeno – podle mohutnosti výběrového prostoru.

Kardinalitou (kardinálním číslem, mohutností) množiny přitom rozumíme počet jejích prvků, ovšem v poněkud zobecněném pojetí. Je-li počet prvků množiny A konečný, pak je kardinálním číslem právě tento počet. Tedy množina $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, kterou bývá zvykem označovat symbolem $\hat{n}$, má kardinální číslo rovné číslu n. Píšeme $|M| = n$. Pro $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ proto platí, že $|B| = 4$. Pokud ale lze nějakou množinu bijektivně zobrazit na množinu přirozených čísel $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, pak je tak zvaně spočetná. U takových množin už nelze stanovit klasicky chápaný pojem počtu prvků. K odstranění tohoto problému slouží právě číslo kardinální. Pro spočetné množiny ho označujeme symbolem $\aleph_0$ [čteme: alef nula]. Takže například množina $C = \{7, 14, 21, 28, \ldots\}$ všech přirozených čísel dělitelných sedmi má kardinální číslo rovné $\aleph_0$. A dokonce i množina $\mathbf{Q}$ všech racionálních čísel má stejnou mohutnost, protože ji lze na $\mathbf{N}$ bijetivně zobrazit. Píšeme $|C| = |\mathbf{Q}| = \aleph_0$. Nespočetný množinám bijektivně zobrazitelným na množinu $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ reálných čísel pak přísluší kardinální číslo $\aleph_1$. Proto například pro interval $I = (-1, 2)$ platí $|I| = \aleph_1$.

Je-li mohutnost množiny všech přípustných hodnot náhodné proměnné konečná či spočetná, tj. je-li $|E| \leqslant \aleph_0$, hovoříme o **diskrétních náhodných systémech/proměnných**. Zástupcem diskrétních náhodných systémů je například výše diskutovaná francouzská ruleta nebo losování čísel Sportky, kdy má množina všech přípustných hodnot 49 prvků, neboť $E = \{1, 2, \ldots, 49\}$. Je-li naopak $|E| = \aleph_1$, tj. je-li množina všech přípustných hodnot náhodné

proměnné nespočetná, hovoříme o **spojité náhodné veličině.** Reprezentanty spojitých náhodných veličin jsou například rychlost pohybu buněk v živých organizmech, mzda zaměstnanců obchodní společnosti, nebo cena akcie ČEZ na Prague Stock Exchange.

1.3.1 Úloha – klasifikace náhodných proměnných

Pokuste se nalézt vlastní příklady disktrétních a spojitých náhodných jevů. Vysvětlete, z jakého důvodu zařazujete daný jev do dané kategorie.

1.4 Pestrost pravděpodobnostních dotazů

Ptáme-li se, jaké pravděpodobnostní dotazy můžeme pro zvolenou náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ zodpovědět a kolik takových dotazů vlastně existuje, je zřejmé, že to bude souviset s mohutností celého výběrového prostoru. Je-li výběrovým prostorem dvouprvková množina $E = \{p = \text{panna}, o = \text{orel}\}$, pak lze položit pouze tyto čtyři dotazy:

- Padne při jednom hodu mincí orel?
- Padne při jednom hodu mincí panna?
- Padne při jednom hodu mincí něco z dvojice panna, orel?
- Nepadne při jednom hodu mincí žádný z této dvojice?

Ostatní dotazy nedávají smysl. Tuto čtveřici lze zcela intuitivně přeformátovat do standardního tvaru pravděpodobnostního dotazu (viz vztah (1.1)), a to takto:

- $\mathcal{P}[\mathbb{X} = o] \;=\; \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{o\}] \;=\; ?$
- $\mathcal{P}[\mathbb{X} = p] \;=\; \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{p\}] \;=\; ?$
- $\mathcal{P}[\mathbb{X} = o \;\vee\; \mathbb{X} = p] \;=\; \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{p, o\}] \;=\; ?$
- $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \emptyset] \;=\; ?$

Odsud ihned plyne, že smysluplným dotazem bude jakýkoli dotaz tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \;=\; ?$ pro libovolnou podmnožinu výběrového prostoru E. A protože je dobře známo, že počet všech podmnožin množiny, která má m prvků je roven 2^m, víme nyní, že všech dostupných pravděpodobnostních dotazů je právě 2^m. Zobecněně to platí dokonce i pro spočetně či nespočetně velké výběrové prostory, kde je například dokázáno, že $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, tj. že v případě spočetné náhodné proměnné existuje nespočetně mnoho pravděpodobnostních dotazů.

Mezi všemi pravděpodobnostními dotazy existují dva, které mají specifické postavení a triviálně zjistitelnou hodnotu výsledku. Jedná se o variantu, kdy $A = E$, resp. $A = \emptyset$. Hovoříme o tzv. **jistém jevu** (varianta $A = E$), resp. o **jevu nemožném** (varianta $A = \emptyset$). Platí pro ně rovnosti $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in E] = 1$ a $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \emptyset] = 0$. Za nemožný jev pokládáme jev, který nemůže nastat při žádné realizaci zkoumaného náhodného pokusu.

Soustavu všech podmnožin libovolné množiny D nazýváme **potencí množiny** a označujeme symbolem 2^D, tj. $2^D = \{A : \; A \subset D\}$. Jistě tedy $\emptyset \in 2^D$ a $D \in 2^D$. Poznámka: Symbol 2^D je odvozen z faktu, že soustava 2^D obsahuje, jak bylo diskutováno výše, právě $2^{|D|}$ množin.

1.4.1 Úloha – řešení pravděpodobnostních dotazů

Zkoumejme náhodný jev spočívající v hodu mincí, o níž je známo, že panna padá pětkrát častěji než orel. Při znalosti tohoto chování zodpovězte všechny pravděpodobnostní dotazy z předešlé sekce.

1.5 Obecné vlastnosti pravděpodobnosti – intuitivní zavedení

Uvažujme nyní libovolnou náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$, jejíž výběrový prostor (množina všech přípustných stavů) je E. Intuitivně očekáváme, že pro libovolnou podmnožinu A množiny E, tj. $\forall A \in 2^E$, bude možné stanovit pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A]$, že náhodná veličina nabude hodnoty právě z množiny A. Ačkoli pro diskrétní náhodné proměnné je toto tvrzení pravdivé zcela, pro spojité náhodné proměnné je situace, jak záhy uvidíme, mírně složitější. Nejprve tedy pojďme diskutovat obecné vlastnosti pravděpodobnosti pro diskrétní náhodné proměnné.

Po poměrně podrobném úvodu do problematiky lze nyní pravděpodobnost chápat jako zobrazení, které množinám A z potence 2^E, kde E je výběrový prostor zkoumané náhodné proměnné, přiřazuje hodnoty z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, vyjadřující pravděpodobnost, že výsledkem náhodného experimetu bude některý z prvků množiny A. Tedy:

$$\mathcal{P} : 2^E \mapsto \langle 0, 1\rangle.$$

Tato pravděpodobnost také nutně splňuje následující základní vlastnosti:

- nulovou pravděpodobnost pro prázdnou množinu, tj. $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \emptyset] = 0$;
- jednotkovou pravděpodobnost pro množinu všech přípustných stavů, tj. $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in E] = 1$;
- nezápornost, tj. splnění implikace $A \in 2^E \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \geqslant 0$;
- monotónii, tj. splnění implikace $A, B \in 2^E \wedge A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \leqslant \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B]$;
- aditivitu, tj. splnění implikace $A, B \in 2^E \wedge A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A \cup B] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] + \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B]$.

Odtud je patrná výrazná podobnost mezi pravděpodobností (jakožto množinovou funkcí, která přiřazuje množinám číselné hodnoty) a obecnou mírou tak, jak byla vybudována v Lebesgueově teorii míry (viz skripta [**?**]). V podstatě lze říci, že pravděpodobnost je normalizovaná míra, protože z výše uvedených vlastností jsou čtyři přesnou kopií axiomů míry, pouze druhá vlastnost (jakási normovanost) je určitým specifikem pravděpodobnosti. Tato silná korespondence mezi obecnou mírou a mírou pravděpodobnostní nám v dalším textu pomůže vybudovat (kvantitativně i kvalitativně) pravděpodobnost bezesporným způsobem, což nebylo v historii budování aparátu pravděpodobnosti vždy snadné.

1.5.1 Komplikace při studiu spojitých náhodných veličin

Intuitivně by se mohlo zdát, že se přechodem od diskrétních ke spojitým náhodným veličinám nic zásadního nemění, a že tedy dotazy tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] =?$ jsou vyčíslitelné pro všechny volby podmnožin $A \subset E$. Pokud jsou zástupci takových podmnožin $A \subset E$ voleny nepříliš komplikovaně, tj. je-li A reprezentováno kupříkladu jednoprvkovou, konečněprvkovou, spočetněprvkovou množinou, nebo intervalem či jejich konečným, resp. spočetným sjednocením, pak hodnota $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A]$ skutečně existuje. Ovšem existují i různé technicky překombinované volby množiny A, kdy pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A]$ vyčíslit nelze. Tento problém řeší rigorózní cestou právě teorie

míry (viz [**?**]). My se v těchto skriptech omezíme pouze na výsledek celého postupu. Tím je fakt, že se v případě spojitých náhodných proměnných za definiční obor pravděpodobnosti $\mathcal{P}$, kterým je v diskrétním případě celá soustava 2^E, klade jenom jistá vhodná podsoustava $\mathscr{D} \subset 2^E$, která je tzv. **množinovou σ−algebrou.** Tato soustava $\mathscr{D}$ je vytvořena jako nejmenší možná σ−algebra vytvořená nad množinovou soustavou $\{G \subset E : G = G^\circ\}$ všech otevřených podmnožin množiny E. Je-li např. $E = \mathbf{R}$, což je typická situace, pak do této minimální σ−algebry, které se v teorii míry říká borelovský uzávěr, patří všechny jednoprvkové, konečněprvkové, spočetněprvkové množiny, všechny intervaly (libovolného typu) a všechna jejich konečná či spočetná sjednocení. A pochopitelně také prázdná množina a sama množina E. To je pro naše záměry budování rigorózní teorie pravděpodobnosti plně dostačující. O množinách z borelovského uzávěru $\mathscr{D}$ hovoříme jako o **borelovských množinách**.

Závěrem těchto úvah je tedy skutečnost, že $\mathrm{Dom}(\mathcal{P}) = \mathscr{D}$, tj. že ve spojitých případech lze klást pravděpodobnostní dotazy pouze ve tvaru

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \ = ?, \quad \text{kde } A \in \mathscr{D}.$$

Soustavu množin $\mathscr{D}$ prohlásíme za **množinovou σ−algebru,** pokud splňuje tyto podmínky:

- uzavřenost na konečná sjednocení: $\forall A, B \in \mathscr{D} : \ A \cup B \in \mathscr{D}$.
- uzavřenost na rozdíly: $\forall A, B \in \mathscr{D} : \ A \setminus B \in \mathscr{D}$.
- existence množinového prezidenta: $\exists E \in \mathscr{D} : \ A \in \mathscr{D} \Rightarrow A \subset E$.
- uzavřenost na spočetná sjednocení: $\forall A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{D} : \ \cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{D}$.

1.5.2 Úmluva

Z předešlé části textu vyplývá, že (je-li jasné, o jaké náhodné proměnné se hovoří) není nezbytné zapisovat pravděpodobnostní dotazy v kompletním tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] =?$, ale že je lze bez újmy na obecnosti zestručnit do podoby $\mathcal{P}[A] =?$. Tohoto zjednodušení se v dalším textu většinou přidržíme.

1.6 Pravděpodobnostní míra – rigorózní zavedení

Z matematického pohledu chápeme pravděpodobnost jako pravděpodobnostní míru

$$\mathcal{P} : 2^E \mapsto \langle 0, 1 \rangle,$$

jejímž definičním oborem $\mathrm{Dom}(\mathcal{P})$ je buď potence nějakého spočetného výběrového prostoru E, anebo (v případě spojitých náhodných proměnných) množinová soustava tzv. borelovských množin, o níž bylo pojednáno výše. Souhrnně (bez rozlišení, zda je daná proměnná diskrétní či spojitá) označujeme definiční obor pravděpodobnostní míry termínem σ−**algebra jevů.** Budeme pro ni používat symbol $\mathscr{D}$.

Pravděpodobností (pravděpodobnostní mírou) tedy budeme rozumět každé zobrazení $\mathcal{P} : \mathscr{D} \mapsto \langle 0, 1 \rangle$, které všem množinám ze soustavy $\mathscr{D}$ přiřazuje číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ při splnění následujících axiomů:

- axiom nulovosti: $\mathcal{P}[\emptyset] = 0$;

- axiom normality: $\mathcal{P}[E] = 1$;
- axiom monotónie: $A, B \in \mathscr{D} \wedge A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A] \leqslant \mathcal{P}[B]$;
- axiom nezápornosti: $A \in \mathscr{D} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A] \geqslant 0$;
- axiom aditivity: $A, B \in \mathscr{D} \wedge A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B]$.
- axiom σ–aditivity: $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \mathscr{D} \wedge A_k \cap A_\ell = \emptyset \ (k \neq \ell) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[\cup_{k=1}^{\infty} A_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}[A_k]$.

Toto zavedení je sice redundantní, což značí, že některé z uvedených axiomů je možno prokázat na základě splnění zbylých axiomů, ale pro přehlednost a lepší pochopení se ho v tomto textu přidržíme.

Zde navíc podotýkáme, že z axiomů pravděpodobnostní míry bezprostředně vyplývá, že

$$\forall G \in \mathscr{D} : \ \mathcal{P}[G] \in \langle 0, 1 \rangle, \tag{1.2}$$

tj. $\mathrm{Ran}(\mathcal{P}) \subset \langle 0, 1 \rangle$, kde $\mathrm{Ran}(\mathcal{P})$ značí obor hodnot pravděpodobnostní míry.

1.7 Jevy a jejich množinová interpretace

Intuitivně jsme již pochopili, že výsledky náhodných pokusů lze s výhodou pokládat za množiny možných výsledků náhodného experimentu. Této úvahy jsme již využili při zjednodušení zápisu $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A]$ na $\mathcal{P}[A]$. Odsud ale vyplývá, že při řešení úloh na pravděpodobnost bude možné používat množinovou symboliku a operace.

Jev, který nastane tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů A, B, se nazývá **sjednocením jevů** A a B a značí se symbolem $A \cup B$. Jev, který nastane, pokud nastanou oba jevy A, B současně, se nazývá **průnikem jevů** A a B a značí se symbolem $A \cap B$. Analogicky je definováno také sjednocení či průnik většího počtu jevů.

Jev, který nastane, jestliže nastane jev A, ale nenastane jev B, se nazývá **rozdílem jevů** A a B a značí se symbolem $A \setminus B$.

Platí-li, že kdykoli nastane jev A, nastane i jev B, řekneme, že A **je podjevem jevu** B nebo že jev A má za následek jev B. Píšeme $A \subset B$.

Jev A, který nastává právě tehdy, když nenastává jev B, se nazývá **jevem opačným (doplňkovým)** k jevu A Označujeme ho symbolem $A = B^c$ a zjevně platí, že $B^c = E \setminus B$, resp. $B \cup B^c = E$.

Jevy A a B, pro které $A \cap B = \emptyset$, se nazývají **neslučitelnými (disjunktními) jevy**. Jevy $B_1, B_2, \ldots, B_n$ se nazývají neslučitelnými (disjunktními), platí-li pro ně implikace

$$\forall i, k \in \{1, 2, \ldots, n\} : \quad i \neq k \ \Rightarrow \ B_i \cap B_k = \emptyset.$$

Jestliže navíc platí, že $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = E$, řekneme, že jevy $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tvoří **úplný systém neslučitelných jevů.**

Jev, který lze vyjádřit jako sjednocení alespoň dvou neslučitelných jevů, se nazývá **jev složený.** Jev, který složený není, se nazývá **jevem elementárním.** Snadno lze ukázat, že každé dva elementární jevy jsou neslučitelné a že celý výběrový prostor E lze rozložit na úplný systém elementárních jevů.

1.8 Odvozené vlastnosti pravděpodobnosti

Z axiomů pravděpodobnosti lze vcelku pohodlně odvodit celou řadu doplňkových vlastností, které pravděpodobnostní mítu charakterizují. Nejprve ovšem ukážeme, že dokonce i axiom monotonie může být odvozen ze zbylých axiomů. Uvažme množiny (jevy) $A, B \in \mathscr{D}$, takové, že A je podjevem B, tj. $A \subset B$. Z rovností $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ a z axiomu aditivity plyne, že

$$\mathcal{P}[B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B \setminus A].$$

Zároveň ale z odvozené vlastnosti (1.2) víme, že $\mathcal{P}[B \setminus A] \in \langle 0, 1 \rangle$. Odtud již přímo vyplývá, že $\mathcal{P}[A] \leqslant \mathcal{P}[B]$, což bylo cílem dokázat.

1.8.1 Úloha – další vlastnosti pravděpodobnosti

V tomto příkladě se pokusme ukázat, že pro pravděpodobnost platí také další dva dodatkové vztahy. Prvním z nich je **subtraktivita,** tj. tvrzení tvaru:

$$A, B \in \mathscr{D} \ \wedge \ A \subset B \implies P[B \setminus A] = \mathcal{P}[B] - \mathcal{P}[A].$$

Druhým z nich je **komplementarita,** tj. tvrzení tvaru:

$$A \in \mathscr{D} \implies \mathcal{P}[A^c] = 1 - \mathcal{P}[A].$$

1.8.2 Úloha – důkazy dalších vlastností

Dokažte, že platí:

- $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B] - \mathcal{P}[A \cap B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathscr{D}$.
- Je-li $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathscr{D}$ úplný systém neslučitelných jevů, pak $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}[B_k] = 1$.
- $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c$ pro libovolnou sadu jevů ze σ–algebry $\mathscr{D}$.
- $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_n^c$ pro libovolnou sadu jevů ze σ–algebry $\mathscr{D}$.
- $\mathcal{P}[A \setminus B] + \mathcal{P}[A \cap B] + \mathcal{P}[B \setminus A] = \mathcal{P}[A \cup B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathscr{D}$.

1.8.3 Úloha – rozhodnutí o platnosti tvrzení

Pokusme se rozhodnout, zda (případně za jakých podmínek) platí rovnost $\mathcal{P}[A \setminus B] = \mathcal{P}[A] - \mathcal{P}[B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathscr{D}$.

Kapitola 2

Distribuční funkce a její vlastnosti

Bez ohledu na typ náhodné proměnné lze pro každou jednorozměrnou náhodnou proměnnou zavést nejuniverzálnější ze všech pravděpodobnostních charakteristik, kterou je tzv. distribuční funkce. Jedná se vlastně o funkci jedné proměnné, která vyčerpávajícím způsobem charakterizuje náhodný proces, který analyzujeme. Prostřednictvím ní lze totiž, jak uvidíme později, zodpovědět každý z přípustných pravděpodobnostních dotazů.

2.1 Zavedení distribuční funkce náhodné proměnné

Pro náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ zavádíme k ní příslušnou **distribuční funkci** předpisem

$$F(x) := \mathcal{P}[\mathbb{X} < x]. \tag{2.1}$$

Definičním oborem distribuční funkce je množina $\mathbf{R}$ všech reálných čísel, a to i tehdy, je-li výběrovým prostorem podstatně méně mohutná množina, například interval $E = (-4, 7)$, nebo čtyřprvková množina $E = \{2, 4, 6, 8\}$.

2.1.1 Příklad – distribuční funkce pro hod falešnou kostkou

Uvažujme falešnou hrací kostku, při jejímž hodu padá číslo 3 pětkrát častěji něž ostatní hodnoty. Všechny ostatní hodnoty jsou stejně pravděpodobné. Výběrovým prostorem je množina $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$. A jejím rozkladem na úplný systém neslučitelných (a zároveň elementárních) jevů je zjevně systém množin (jevů) $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \{3\}$, $B_4 = \{4\}$, $B_5 = \{5\}$ a $B_6 = \{6\}$. S ohledem na výše uvedený fakt, že $\mathcal{P}[B_3] = 5\mathcal{P}[B_k]$ pro všechna $k = 1, 2, 4, 5, 6$, a také že $\sum_{k=1}^{6} \mathcal{P}[B_k] = 1$, vidíme, že pravděpodobnostní tabulka zkoumaného jevu vypadá takto:

Elementární jev	Jeho pravděpodobnost
$B_1 = \{1\}$	$\mathcal{P}[B_1] = \frac{1}{10}$
$B_2 = \{2\}$	$\mathcal{P}[B_2] = \frac{1}{10}$
$B_3 = \{3\}$	$\mathcal{P}[B_3] = \frac{5}{10}$
$B_4 = \{4\}$	$\mathcal{P}[B_4] = \frac{1}{10}$
$B_5 = \{5\}$	$\mathcal{P}[B_5] = \frac{1}{10}$
$B_6 = \{6\}$	$\mathcal{P}[B_6] = \frac{1}{10}$

Z této pravděpodobnostní tabulky lze pak snadno dopočítat hodnotu příslušné distribuční funkce v libovolném bodě $x \in \mathbf{R}$. Například

$$F(2.5) := \mathcal{P}[\mathbb{X} < 2.5] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{1,2\}] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = 1] + \mathcal{P}[\mathbb{X} = 2] = \frac{2}{10}.$$

Analogicky

$$F(5) := \mathcal{P}[\mathbb{X} < 5] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{1,2,3,4\}] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = 1] + \mathcal{P}[\mathbb{X} = 2] + \mathcal{P}[\mathbb{X} = 3] + \mathcal{P}[\mathbb{X} = 4] = \frac{8}{10}.$$

Povšimněte si ale, že pro $x = 5,01$, (tj. při nepatrné změně předešlého zadání) platí

$$F(5.01) := \mathcal{P}[\mathbb{X} < 5.01] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{1,2,3,4,5\}] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = 1]+\mathcal{P}[\mathbb{X} = 2]+\mathcal{P}[\mathbb{X} = 3]+\mathcal{P}[\mathbb{X} = 4]+\mathcal{P}[\mathbb{X} = 5] = \frac{9}{10}.$$

Z toho je zřejmé, že distribuční funkce diskrétních náhodných veličin má typicky skokový charakter. Říkáme, že $F(x)$ je schodovitou funkcí. Pro tento příklad ještě vykresleme její podobu.

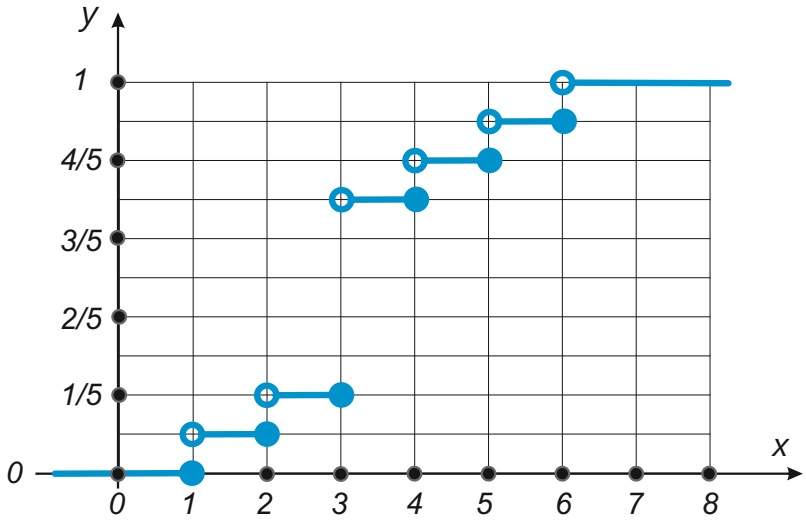

Figure 2.1
Distribuční funkce pro hod falešnou kostkou

Z obrázku 2.1 je patrné, že vykreslená distribuční funkce je spojitá zleva. To se nakonec ukáže jako univerzální vlastnost každé distribuční funkce.

2.1.2 Příklad – distribuční funkce rovnoměrného spojitého rozdělení

Jako elementární příklad distribuční funkce nám může dobře posloužit distribuční funkce spojité rovnoměrně rozdělené náhodné veličiny, jejíž realizace mohou se stejnou pravděpodobností nabývat všech hodnot z otevřeného intervalu (a, b). Není nikterak těžké určit, že příslušná distribuční funkce je tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant a; \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a,b); \\ 1 & x \geqslant b. \end{cases}$$

Tato distribuční funkce je vykreslena na obrázku 2.2. V tomto případě je distribuční funkce nejen spojitá zleva, ale nad to ještě kompletně spojitá. Na obou obrázcích jsou navíc dobře patrné všechny základní vlastnosti distribučních funkcí citované v oddíle 2.2.

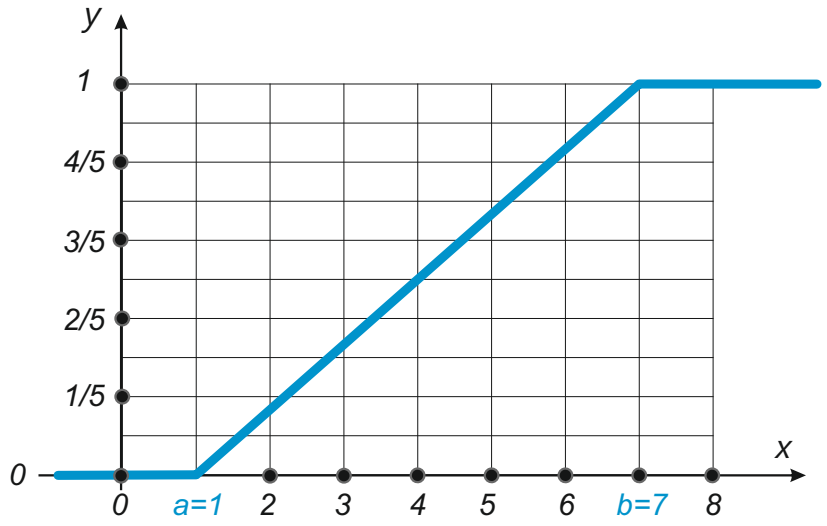

Figure 2.2
Distribuční funkce rovnoměrného spojitého rozdělení

Uvedené rozdělení se nazývá rovnoměrné, protože všechny intervaly $\langle a, a+\delta)$ o stejné délce $\delta > 0$, které jsou podmnožinou výběrového prostoru $E = \langle 1, 7\rangle$, mají stejnou pravděpodobnost. To uvidíme

2.2 Základní vlastnosti distribuční funkce

Mezi vlastnosti všech distribučních funkcí, které lze jednoduše vyvodit přímo z definice (2.1), patří tyto:

- $\mathrm{Dom}(F) = \mathbf{R}$;
- $\mathrm{Ran}(F) \subset \langle 0, 1\rangle$;
- $F(x)$ je na $\mathbf{R}$ neklesající;
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;
- $F(x)$ je na $\mathbf{R}$ spojitá zleva.

Dodatečným technickým předpokladem je požadavek na částečnou spojitost funkce $F(x)$, kdy je $F(x)$ buď kompletně spojitá, tj. $F(x) \in C(\mathbf{R})$, anebo má pouze konečně bodů nespojitosti. Tuto druhou vlastnost zapisujeme symbolem $F(x) \in PC(\mathbf{R})$. Pro pečlivější čtenáře také nabízíme níže přesnou definici prostoru po částech spojitých funkcí.

Nechť M je libovolná neprázdná podmnožina množiny všech reálných čísel. Symbolem $PC(M)$ označujeme množinu (přesněji třídu) všech funkcí $g : M \mapsto \mathbf{R}$ **po částech spojitých** na množině M. Pro příslušnost měřitelné funkce $g(x)$ do třídy $PC(M)$ musí funkce splňovat tyto vlastnosti: a) $M \subset \mathrm{Dom}(g)$; b) $g(x)$ je spojitá zleva ve všech bodech množiny M; c) $g(x)$ je spojitá všude v množině $A \subset M$, přičemž $|M \setminus A| < \aleph_0$, což značí, že $g(x)$ je spojitá ve všech bodech množiny M s výjimkou konečně mnoha bodů zahrnutých v množině $M \setminus A$ a d) v bodech množiny A navíc existují také limity zprava (konečné či nekonečné).

2.2.1 Heavisideova funkce

Jednou z nejelementárnějších po částech spojitých funkcí je tzv. **Heavisideova funkce** [čti `hevisajd`]. Její jednorozměrná verze $\Theta(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ je zavedena předpisem

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0; \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Pro libovolnou funkci $h(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ navíc definujeme součin $\Theta(x)\, h(x)$ jako nulový pro všechna $x \in I$, kde $I = (-\infty, 0\rangle$, a to bez ohledu na to, zda je funkce na množině I definovaná či zda v některých bodech intervalu I nemá limity, případně má limity rovné $\pm\infty$.

Heavisideova funkce představuje elegantní způsob, jak zjednodušovat zápisy funkcí, jejichž průběhy se skokově mění. Takové funkce se totiž běžně zapisují pomocí větvení, jako například u funkce

$$g(x) = \begin{cases} 7x^2 & |x| < 4; \\ 0 & |x| \geqslant 4. \end{cases}$$

Takovou funkci lze s využitím formátu Heavisideovy funkce pohodlně zapsat v kompaktním tvaru $g(x) = 7x^2\Theta(4 - |x|)$.

Dalším příkladem po částech spojité funkce je například funkce $g(x) = \Theta(x)/x$, při jejímž zkoumání se uplatní výše zmíněné pravidlo, které vyústí ve fakt, že $g(0) = 0$, ačkoli výraz $\Theta(x)/x$ by sám o sobě nebyl v nule definován.

2.2.2 Důkazy základních vlastností distribuční funkce

V této části textu prodiskutujeme (a zdůvodníme) základní vlastnosti, které má každá distribuční funkce.

To, že definičním oborem distribuční funkce je množina všech reálných čísel, je naprosto zřejmé z definice (2.1). A protože pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} < x]$ může nabývat pouze hodnot mezi nulou a jedničkou (včetně), je zcela zřejmě, že funkčními hodnotami distribuční funkce $F(x)$ mohou být pouze čísla z uzavřeného intervalu $\langle 0, 1\rangle$, což značí, že $\mathrm{Ran}(F) \subset \langle 0, 1\rangle$. Neznamená to ale nutně, že $\mathrm{Ran}(F) = \langle 0, 1\rangle$, jak je patrné například na obrázku XX výše, kde $\mathrm{Ran}(F) = \{0, 1/10, 1/5, 7/10, 4/5, 9/10, 1\}$.

Nyní dokažme, že $F(x)$ je na celém $\mathbf{R}$ **neklesající** funkcí. Zvolme tedy libovolně dvojici čísel $x < y$ a pokusme se ukázat, že $F(x) \leqslant F(y)$. Za daných okolností zcela jistě platí, že interval $(-\infty, x)$ je podmnožinou intervalu $(-\infty, y)$. Z monotonie pravděpodobnostní míry odtud plyne, že $\mathcal{P}[(-\infty, x)] \leqslant \mathcal{P}[(-\infty, y)]$. Odtud dále

$$F(x) = \mathcal{P}[\mathbb{X} < x] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, x)] \leqslant \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, y)] = \mathcal{P}[\mathbb{X} < y] = F(y),$$

což bylo cílem dokázat.

Další vlastností, jíž se pokusíme dokázat, je rovnost $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Ta fakticky vychází z faktu, že $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, +\infty)] = \mathcal{P}[\mathbf{R}] = 1$. Je-li tedy $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost vyhovující podmínkám $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, pro níž navíc platí, že $\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$, pak je posloupnost příslušných funkčních hodnot $F(x_k)_{k=1}^{\infty}$ neklesající, jak lze snadno odvodit z monotonie pravděpodobnostní míry

$$F(x_k) = \mathcal{P}[\mathbb{X} < x_k] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, x_k)] \leqslant \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, x_{k+1})] = \mathcal{P}[\mathbb{X} < x_{k+1}] = F(x_{k+1}),$$

a z logiky věci také omezená. Každá taková posloupnost ale musí mít nutně limitu. Označme ji $\lim_{k\to+\infty} F(x_k) = a$. Zbývá prokázat, že $a = 1$. Posloupnost intervalů $I_k = \langle x_k, x_{k+1})$ doplněná o

interval $I_0 = (-\infty, x_1)$ je disjunktním rozkladem množiny $\mathbf{R}$, neboť $\mathbf{R} = \uplus_{k=0}^{\infty} I_k$. Ze σ–aditivity pravděpodobnostní míry odsud dostáváme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}[\mathbb{X} \in I_k] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, +\infty)] = 1.$$

Protože $\mathcal{P}[I_k] = F(x_{k+1}) - F(x_k)$, jak uvidíme vzápětí, a $\mathcal{P}[I_0] = F(x_1)$, má n–tý částečný součet řady $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}[\mathbb{X} \in I_k]$ hodnotu

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}[\mathbb{X} \in I_k] = F(x_1) + \sum_{k=1}^{n} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(x_{n+1}).$$

A protože součet číselné řady je v matematické analýze definován jako limita posloupnosti částečných součtů, musí nutně platit:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}[\mathbb{X} \in I_k] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}[\mathbb{X} \in I_k] = \lim_{n\to\infty} F(x_{n+1}),$$

odkud již vidíme, že $\lim_{n\to\infty} F(x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = 1$. Protože tato vlastnost platí pro každou posloupnost daného tvaru, plyne z Heineovy věty, že $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Analogickým způsobem se prokáže, že $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Prokázat **levou spojitost** distribuční funkce, tedy zbývající ze základních vlastností, je poněkud technickou záležitostí. Pečlivější čtenáře proto odkazujeme za větu 2.3.10 na straně 26 skript [**?**]).

2.3 Pravděpodobnosti intervalů a bodových množin

Znalost distribuční funkce technicky vzato umožňuje zodpovědět všechny přípustné pravděpodobnostní dotazy. Mezi nimi jsou ale nejčastějšími verzemi otázky určení pravděpodobnosti pro bodové množiny či intervaly.

2.3.1 Pravděpodobnost polouzavřeného intervalu

Nejprve zvolme čísla $a < b$ libovolně a pokusme se zodpovědět pravděpodobnostní dotaz tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b)] = ?$. Protože ale platí, že $\langle a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$ a zároveň $(-\infty, a) \subset (-\infty, b)$, dostáváme, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b)] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, b)] - \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, a)] = \mathcal{P}[\mathbb{X} < b] - \mathcal{P}[\mathbb{X} < a] = F(b) - F(a).$$

Přimomínáme, že zde bylo využito výsledku jedné z předchozích úloh, a sice

$$A, B \in \mathscr{D} \ \wedge \ A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A \setminus B] = \mathcal{P}[A] - \mathcal{P}[B].$$

2.3.2 Pravděpodobnost otevřeného intervalu

Pro libovolná čísla $a < b$ stanovme nyní pravděpodobnost, že výsledkem experimentu bude hodnota z otevřeného intervalu (a, b). Nejprve uvažme, že otevřený interval $(0, 1)$ lze pokrýt disjunktním spočetným sjednocením polouzavřených intervalů, neboť

$$(0, 1) = \biguplus_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) = \langle 1/2, 1) + \langle 1/3, 1/2) + \langle 1/4, 1/3) + \dots.$$

Odtud

$$(0, b-a) = \biguplus_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{b-a}{n+1}, \frac{b-a}{n} \right)$$

a následně

$$(a, b) = \biguplus_{n=1}^{\infty} \left\langle a + \frac{b-a}{n+1}, a + \frac{b-a}{n} \right).$$

Ze σ−aditivity míry pak odsud vyvozujeme, že

$$\mathcal{P}[(a,b)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}\left[\left\langle a + \frac{b-a}{n+1}, a + \frac{b-a}{n} \right)\right].$$

Dále:

$$\mathcal{P}[(a,b)] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F\left(a + \frac{b-a}{n}\right) - F\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right)\right).$$

Posloupnost částečných součtů této řady lze ale razantně zjednodušit, neboť

$$\sum_{n=1}^{k} \left(F\left(a + \frac{b-a}{n}\right) - F\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right)\right) =$$

$$= F(b) - F(a/2 + b/2) + F(a/2 + b/2) - F(2a/3 + b/3) + F(2a/3 + b/3) - \ldots + F\left(a + \frac{b-a}{k}\right) - F\left(a + \frac{b-a}{k+1}\right) =$$

$$= F(b) - F\left(a + \frac{b-a}{k+1}\right).$$

A protože součet číselné řady je definován jako limita posloupnosti částečných součtů, získáváme výsledek

$$\mathcal{P}[(a,b)] = \lim_{k\to\infty} \left(F(b) - F\left(a + \frac{b-a}{k+1}\right)\right) = F(b) - \lim_{x\to a_+} F(x),$$

kdy posledně uvedený výraz reprezentuje limitu zprava funkce $F(x)$ v bodě $x = a$.

Za povšimnutí zde stojí, že pravděpdobnosti $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b)]$ a $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in (a, b)]$ jsou totožné jedině v případě, že je distribuční funkce $F(x)$ spojitá v bodě a. Jinak jsou obě pravděpodobnosti různé a vzhledem k monotonii pravděpodobnostní míry lze univerzálně stanovit pouze nerovnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in (a, b)] \leqslant \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b)]$.

2.3.3 Pravděpodobnost jednoprvkové množiny

Jako výchozí tvar jednoprvkové množiny zvolme $A = \{a\}$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$. Protože ale platí elementární rovnosti $\{a\} \uplus (a, b) = \langle a, b)$ a $\{a\} \cap (a, b) = \emptyset$, vychází rovnou z axiomu aditivity, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = a] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b) \setminus (a, b)] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b)] - \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (a, b)] =$$

$$= F(b) - F(a) - F(b) + \lim_{x\to a_+} F(x) = \lim_{x\to a_+} F(x) - F(a) = [F(x)]_a,$$

kde symbol $[F(x)]_a$ označuje délku skoku distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = a$. Je-li tedy distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = a$ spojitá, je pravděpodobnost, že výsledkem experimentu bude hodnota a, nulová.

2.3.4 Pravděpodobnost konečněprvkové množiny

Uvažujme množinu $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ čítající m různých hodnot a zkoumejme pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in K]$. Rozložíme-li množinu $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ na disjunktní sjednocení množin $A = \{a_1\}$ a $B = \{a_2, \ldots, a_m\}$, pak z aditivity pravděpodobnostní míry dostáváme, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in K] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] + \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_1] + \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B].$$

Rozložíme-li nyní množinu $B = \{a_2, \ldots, a_m\}$ na disjunktní sjednocení množon $C = \{a_2\}$ a $D = \{a_3, \ldots, a_m\}$, potom z analogie dostáváme rovnost

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in K] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] + \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_1] + \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_2] + \mathcal{P}[\mathbb{X} \in C].$$

Opakovanou aplikací tohoto postupu vidíme, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in K] = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_k] = \sum_{k=1}^{m} [F(x)]_{a_k},$$

kde bylo využito výsledku pododdílu 2.3.3.

2.3.5 Pravděpodobnost spočetněprvkové množiny

Je-li $S = \{a_1, a_2, \ldots\}$ množina čítající spočetně různých hodnot, lze ji podobně jako v předchozím pododdíle rozdělit na spočetné disjunktní sjednocení $S = \uplus_{k=1}^{\infty} \{a_k\}$ jednoprvkových množin. Ze $\sigma-$aditivity pravděpodobnostní míry dostáváme vztah

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in S] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_k] = \sum_{k=1}^{\infty} [F(x)]_{a_k},$$

kde byl opět použit základní vztah získaný v pododdíle 2.3.3.

2.3.6 Úloha – pravděpodobnost uzavřeného intervalu

Na základě předešlých výsledků odvoďte pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b \rangle]$, že výsledkem experimentu s náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ bude hodnota ležící v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$.

2.3.7 Úloha – distribuční funkce diskrétní rovnoměrně rozdělené proměnné

Rozmyslete, jakou vlastnost má distribuční funkce diskrétní náhodné proměnné, kdy jsou všechny elementární jevy stejně pravděpodobné. Nalezněte také příklady takového náhodného jevu a příslušnou distribuční funkci vykreslete.

2.3.8 Příklad – spojité rovnoměrné rozdělení

Uvažujme rovnoměrně rozdělenou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ diskutovanou v oddíle 2.1.2. Z obrázku XX vidíme, že v intervalu $\langle 1, 7 \rangle$ roste distribuční funkce (tj. pravděpodobnost, že $\mathbb{X}$ padne do intervalu $(-\infty, x)$) lineárně, což je znak typický pro rovnoměrné rozdělení. A ukažme, že všechny intervaly $\langle a, a + \delta)$ o stejné délce $\delta > 0$, které jsou podmnožinou výběrového prostoru $E = \langle 1, 7 \rangle$, mají stejnou pravděpodobnost. Aby interval $\langle a, a + \delta)$ byl skutečně podmnožinou intervalu $\langle 1, 7 \rangle$, musí nutně platit, že $1 \leqslant a < 7$ a $a + \delta \leqslant 7$. Pak ale platí:

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, a + \delta)] = F(a + \delta) - F(a).$$

A protože distribuční funkci z obrázku XX lze kompaktně zapsat ve tvaru

$$F(x) = \Theta(x-1) \cdot \Theta^\star(7-x) \cdot \frac{x-1}{6},$$

kde $\Theta^\star(x) = 1 - \Theta(-x)$ je alternativní Heavisideova funkce, dostáváme odtud

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, a+\delta)] = F(a+\delta) - F(a) = \frac{a+\delta-1}{6} - \frac{a-1}{6} = \frac{\delta}{6}.$$

Pro všechny diskutované intervaly je tedy příslušná pravděpodobnost stejná. Výsledek je zřetelně nezávislý na hodnotě a, tj. nezávislý na umístění intervalu uvnitř výběrového prostoru. A to je právě důvod, proč se o této náhodné proměnné hovoří jako o **rovnoměrně rozdělené.**

2.4 Úvahy o množinách nulové pravděpodobnosti

Zajímavou problematikou teorie pravděpodobnosti jsou vlastnosti množin, jejichž pravděpodobnostní míra je nulová. Hovoříme o tzv. $\mathcal{P}$–nulových množinách. Jedná se o ty množiny $A \in \mathscr{D}$, pro které je pravděpodobnost, že výsledkem experimentu s náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ bude hodnota ležící v množině A, nulová, tedy

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] = 0.$$

Jev $\mathbb{X} \in A$ by tedy zřejmě bylo možné klasifikovat, jako jev nemožný. Z klasických příkladů na pravděpodobnost si totiž většinou odnášíme poznatek, že je-li pravděpodobnost nějakého jevu nulová, pak tento jev nemůže nastat. Toto tvrzení je ovšem, jak uvidíme vzápětí, plnohodnotnou pravdou pouze v případě, kdy zkoumáme diskrétní náhodné veličiny. V tomto případě je totiž výběrový prostor E konečnou nebo spočetnou množinou a označíme-li $B = A \cap E$, pak má množina B jistě konečný nebo spočetný počet prvků a zcela jistě pro ni platí rovnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] = 0$. neboť $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] \leqslant \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] = 0$. Za daných okolností, je tedy jasné, že B je složena ze vzájemně různých prvků (číselných hodnot) $b_1, b_2, b_3, \ldots$, tj.

$$B = \{b_k \in \mathbf{R} : \ k = 1, 2, \ldots, m\}$$

nebo

$$B = \{b_k \in \mathbf{R} : \ k \in \mathbf{N}\}.$$

Podle předešlých zjištění tedy

$$0 = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] = \sum_{k=1}^{m} [F(x)]_{b_k},$$

případně

$$0 = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] = \sum_{k=1}^{\infty} [F(x)]_{b_k},$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce náhodné proměnné $\mathbb{X}$. Odtud vidíme, že pro všechna přípustná k je hodnota $[F(x)]_{b_k}$ nulová, tj. distribuční funkce je ve všech bodech b_k spojitá. Navíc tedy $\mathcal{P}[\mathbb{X} = b_k] = 0$, což vzhledem k diskrétnosti náhodné proměnné $\mathbb{X}$ znamená, že žádná z hodnot $b_1, b_2, b_3, \ldots$ nemůže být výsledkem experimentu $\mathbb{X}$.

Pro spojité náhodné proměnné je ale situace mírně komplikovanější. Uvažujme opět, tak jako v oodílech 2.1.2 a 2.3.8 rovnoměrně rozdělenou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ popsanou distribuční funkcí

$$F(x) = \Theta(x-1) \cdot \Theta^\star(7-x) \cdot \frac{x-1}{6}.$$

Zvolíme-li číslo $a \in \mathbf{R}$ libovolně, vidíme, že díky spojitosti distribuční funkce platí

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = a] = [F(x)]_a = \lim_{x \to a_+} F(x) - \lim_{x \to a_-} F(x) = 0.$$

To tedy značí, že pravděpodobnost, že výsledkem experimentu $\mathbb{X}$ bude hodnota a, je nulová. To ale platí pro úplně všechna $a \in \mathbf{R}$. Takže docházíme ke zdánlivě kontroverznímu faktu, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $\mathcal{P}[\mathbb{X} = a] = 0$. Přitom je ale jasné, že losujeme-li čísla z intervalu $E = \langle 1, 7 \rangle$, může čas od času být výsledkem tohoto pokusu jakékoli číslo z tohoto intervalu. To nutně znamená, že výrok $\mathcal{P}[\mathbb{X} = a] = 0$ neříká, že jev $\mathbb{X} = a$ je nemožný. Říká jen, že jeho četnost je v porovnání s jinými (rozsáhlejšími) jevy extrémně nízká. Tím se myslí toto.

Provedeme-li m opakovaných pokusů s toutéž náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ a zaznamenáme-li si do proměnné n počet všech případů, kdy byla výsledkem experimentu hodnota a, pak výraz n/m reprezentuje relativní četnost zkoumaného jevu. Protože číslo n závisí na počtu všech pokusů, píšeme $n = n(m)$. Relativní četnost

$$\varkappa(m) = \frac{n(m)}{m}$$

je tedy také funkcí celkového počtu pokusů. A protože je jasné, že se zvyšujícím se počtem pokusů bude relativní četnost $\varkappa(m)$ konvergovat k teoretické hodnotě pravděpodobnosti $\mathcal{P}[\mathbb{X} = a]$, vidíme, že

$$\lim_{m \to +\infty} \varkappa(m) = \lim_{m \to +\infty} \frac{n(m)}{m} = \mathcal{P}[\mathbb{X} = a] = 0.$$

To tedy značí, že i když čas od času padne hodnota a, počet výskytů tohoto jevu je tak nízký, že podíl příznivých výsledků ku všem výsledkům klesá s počtem pokusů a limitně se (pro počet pokusů rostoucí nade všechny meze) blíží nule.

Tyto úvahy fakticky představují podstatu celé teorie pravděpodobnosti a my je zde bude postupně ještě rozvíjet.

Kapitola 3

Diskrétní náhodná proměnná a její charakteristiky

V této kapitole rozebereme základní vlastnosti diskrétních náhodných proměnných a vzájemné vazby mezi nimi. Upozorníme přitom na zajímavá specifika, která diskrétnost těchto proměnných přináší. Jelikož jsme se v předešlé kapitole ujistili, že distribuční funkce je univerzální popisný nástroj, který funguje spolehlivě jak pro spojité, tak pro diskrétní náhodné proměnné, není již třeba se k tomuto nástroji vracet. Rozebrali jsme ho totiž poměrně důkladně.

3.1 Pravděpodobnostní tabulka

Protože pro diskrétní náhodné proměnné je výběrový prostor buď konečněprvkový nebo nanejvýš spočetněprvkový, lze ho vždy uvádět v jednom ze tvarů

$$E = \{a_k \in \mathbf{R} : \ k = 1, 2, 3, \ldots, m\}, \qquad E = \{a_k \in \mathbf{R} : \ k \in \mathbf{N}\}.$$

A protože jevy $\{a_k\}$ jsou zcela jistě jevy elementární, pro kompletní řešitelnost příslušných pravděpodobnostních dotazů postačí stanovit, jaká je pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{a_k\}] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_k]$ všech těchto elemntárních jevů. K tomu tedy stačí určit tzv. **pravděpodobnostní tabulku,** v níž jsou v prvním sloupci vypsány všechny elementární jevy a ve druhém je stanovena jejich pravděpodobnost. Z této pravděpodobnostní tabulky lze pak jednoduše určit jak distribuční funkci, tak také další charakteristiky, o kterých bude pojednáno níže. Pravděpodobnostní tabulka může ale být pochopitelně, pokud to povaha náhodné proměnné dovoluje, nahrazena i úspornějším zápisem. Příkladem může být například již několikrát diskutovaná francouzská ruleta (viz sekce 1.1.1), jejíž pravděpodobnostní tabulka může být nahrazena kompaktní rovnicí

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = k] = \frac{1}{37}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 36).$$

3.2 Deskriptivní charakteristiky

Na rozdíl od distribuční funkce a pravděpodobnostní tabulky, které obě dávají kompletní přehled o chování náhodné proměnné, mnohem běžnějšími charakteristikami (zejména při řešení úloh z praxe, případně v populárních pojednáních) jsou číselné reprezentace náhodné proměnné. Tyto tzv. **deskriptivní charakteristiky** jsou typicky jednočíselnými údaji, které zhruba vystihují základní rysy zkoumaného jevu. Z těch nejznámější zde uveďme střední hodnotu, rozptyl (varianci), či směrodatnou odchylku.

3.2.1 Střední hodnota náhodné proměnné

Střední hodnotu náhodné proměnné definujeme vztahem

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) := \sum_{x \in E} x \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x], \tag{3.1}$$

pokud ovšem uvedená řada konverguje. To za určitých okolností nemusí být pravda. Všimněte si, že suma prochází všechny prvky výběrového prostoru a jejich velikost násobí (váží) příslušnou pravděpodobností. Vyšší váha je tedy definičním vztahem přisouzena těm hodnotám, jejíchž pravděpodobnost je vyšší. To tedy značí, že střední hodnotou rozumíme jakési statistické těžiště daného jevu, tj. jedinou optimálně vyváženou hodnotu, jíž lze nahradit velké množství realizací daného experimentu.

Už na začátku těchto úvah ale zmiňme, že jednou z výrazných a neustále opakovaných chyb, kterých se dopouští běžní civilisté, je zaměňování pojmu střední hodnota s pojmem aritmetický průměr. Hned na tomto místě si pojďme říci, že zatímco střední hodnota je teoretickou hodnotou odvozenou analytickými prostředky ze znalosti chování náhodné proměnné, tak k vyčíslení aritmetického průměru může dojít až po praktické realizaci daného experimentu. Bývá zvykem těchto n zaznamenených výsledků (označme je například $x_1, x_2, \ldots, x_n$) nazývat **statistickým výběrem.** Z tohoto výběru lze pak snadno vyčíslit aritmetický průměr prostřednictvím banální rovnosti

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Teorie pravděpodobnosti ovšem nakonec prokáže (a my v těchto skriptech také) pevnou souvislost obou diskutovaných pojmů. Pro velký počet realizací, tj. pro n rostoucí nade všechny meze, konverguje totiž aritmetický průměr právě k teoretické střední hodnotě.

3.2.2 Úloha – průměrná hodnota

V jednom městě žijí rodiny s jedním, dvěma, třemi nebo čtyřmi dětmi. Rodin s jedním dítětem je 40%, rodin se dvěma dětmi je 30%, rodin s třemi dětmi je 20% a rodin se čtyřmi dětmi je 10%. Určete kolik dětí má průměrná rodina.

3.2.3 Momenty náhodné proměnné

Kromě střední hodnoty charakterizují analyzovanou náhodnou proměnnou také tzv. **statistické momenty.** Ty jsou zaváděny vztahem

$$\mu_k = \mathrm{E}(\mathbb{X}^k) := \sum_{x \in E} x^k \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x],$$

který je zobecněním vztahu (3.1). Předpokládá se, že k je přirozené číslo nebo nula. Přitom ale pro $k = 0$ je bez ohledu na zvolenou náhodnou proměnnou nultý moment roven vždy jedné. De facto se jedná o potvrzení správné normalizace pravděpodobnosti, tj prokázání rovnosti $\sum_{x \in E} \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = 1$. Prvním momentem je pak právě střední hodnota. O těchto typech momentů se někdy mluví jako o **momentech necentrálních.**

Vedle nich existují ještě **momenty centrální,** které zkoumají chování odchylek $(x - \mu_1)^k$ od střední hodnoty $\mu_1 = \mathrm{E}(\mathbb{X})$. Ty jsou definovány vztahem

$$\varkappa_k := \sum_{x \in E} (x - \mu_1)^k \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x],$$

pokud tedy řada na pravé straně konverguje.

3.2.4 Úloha – vztahy centrálních a necentrálních momentů

Ukažte, že ze znalosti momentů $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ může být dopočten centrální moment $\varkappa_m$.

3.2.5 Rozptyl a směrodatná odchylka

Druhý centrální moment

$$\varkappa_2 := \sum_{x \in E} (x - \mu_1)^2 \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x],$$

má v teorii i praxi pravděpodobnosti naprosto zásadní postavení. Kvantifikuje totiž míru rozptýlení jednotlivých realizací náhodné proměnné kolem příslušné střední hodnoty. Liší-li se výsledky experimentu od střední hodnoty jen nepatrně, je rozptyl malý a naopak. Dvě náhodné proměnné se stejnou střední hodnotou se totiž mohou exrémně odlišovat právě hodnotou roztylu. Jednoduchou matematickou úpravou lze (v analogii k předešlé úloze) ukázat, že

$$\varkappa_2 = \sum_{x \in E} x^2 \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] - 2\mu_1 \sum_{x \in E} x \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] + \mu_1)^2 \sum_{x \in E} \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] =$$

$$= \mu_2 - \mu_1^2 = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \mathrm{E}^2(\mathbb{X}).$$

Rozptyl náhodné proměnné označujeme jedním ze symbolů $\mathrm{D}(\mathbb{X})$, případně $\mathrm{VAR}(\mathbb{X})$. My se v těchto skriptech přidržíme prvního ze symbolů. Zkratka druhého ze symbolů je odvozena z anglického překladu slova ropztyl, tj. variance. Odmocninu z rozptylu pak nazýváme **směrodatnou odchylkou** náhodné proměnné (anglicky: standard deviation) a značíme $\mathrm{SD}(\mathbb{X}) = \sqrt{\mathrm{D}(\mathbb{X})}$.

3.2.6 Úloha – stanovení střední hodnoty a rozptylu

Pro náhodnou proměnnou, jejíž pravděpodobnostní popis je zadán tabulkou

Elementární jev	Jeho pravděpodobnost
$B_1 = \{1\}$	$\mathcal{P}[B_1] = \frac{1}{10}$
$B_2 = \{2\}$	$\mathcal{P}[B_2] = \frac{1}{10}$
$B_3 = \{3\}$	$\mathcal{P}[B_3] = \frac{5}{10}$
$B_4 = \{4\}$	$\mathcal{P}[B_4] = \frac{1}{10}$
$B_5 = \{5\}$	$\mathcal{P}[B_5] = \frac{1}{10}$
$B_6 = \{6\}$	$\mathcal{P}[B_6] = \frac{1}{10}$

vypočítejte střední hodnotu a rozptyl.

3.3 Frekventovaná diskrétní rozdělení

V této sekci představíme několik diskrétních rozdělení, která se velice často objevují v empirických či experimentálních systémech.

3.3.1 Alternativní (Bernoulliho) rozdělení

Jedním z nejjednodušších a všeobecně známých rozdělení je **alternativní (Bernoulliho) rozdělení.** Typickým příkladem jevu, který se řídí tímto rozdělením, je házení mincí. Pravděpodobnost každého ze dvou možných výsledků (panna, orel) je totiž konstantní při každém hodu a parametrem q je pak popsán například výsledek $\mathcal{P}[\mathbb{X} = p]$, tj. $\mathcal{P}[\mathbb{X} = p] = q$, z čehož ihned plyne, že $\mathcal{P}[\mathbb{X} = o] = 1 - q$. Dalšími příklady bernoulliovsky rozdělených náhodných veličin jsou testy, zda je konkrétní výrobek vadný či ne, odpověď člověka na otázku, zda souhlasí s určitým tvrzením (ano/ne), případně test, zda je daný pacient zdravý či nemocný.

Řídí-li se náhodná proměnná $\mathbb{X}$ tímto rozdělením, zapisujeme to symbolicky takto: $\mathbb{X} \sim A(q)$, kde $q \in (0,1)$ je parametr rozdělení. Tabulková podoba rozdělení je následující:

Elementární jev	Jeho pravděpodobnost
$\mathbb{X} = 1$	$\mathcal{P}[\mathbb{X} = 1] = q$
$\mathbb{X} = 0$	$\mathcal{P}[\mathbb{X} = 0] = 1 - q$

přičemž hodnoty 0, 1 mohou zastupovat i nečíselné hodnoty, tj. například 0 = zdravý, 1 = nemocný. Není těžké ukázat, že

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = q, \qquad \mathrm{D}(\mathbb{X}) = q(1-q).$$

3.3.2 Úloha – distribuční funkce alternativního rozdělení

Vykreslete distribuční funkci alternativního rozdělení s parametrem $q = 0.25$.

3.3.3 Binomické rozdělení

Právě probrané rozdělení je vlastně speciálním případem **binomického rozdělení**, které popisuje četnost výskytu náhodného jevu v n na sobě nezávislých pokusech, během nichž má daný jev v čase neměnnou pravděpodobnost. Tato četnost (chápaná jako diskrétní náhodná veličina) tedy může nabývat celočíselných hodnot od nuly po n, což značí, že příslušným výběrovým prostorem je množina $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$. Není těžké odvodit, že pravděpodobnost, že daný jev nastane právě x–krát z n pokusů tj. že $\mathbb{X} = x$, je popsána vztahem

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x}.$$

Tento vztah plyne z faktu, že možností, kterak vybrat $x$tici úspěšných pokusů z n možných, je právě $\binom{n}{x}$, a že má-li být x nezávislých pokusů úspěšných, pak musí být právě $n - x$ pokusů neúspěšných. A pravděpodobnosti nezávislých jevů se, jak známo, násobí. Povšimněte si, že poslední vztah je korektně normalizován, protože

$$\sum_{x \in E} \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x} = (q + 1 - q)^n = 1.$$

To, že je proměnná $\mathbb{X}$ binomicky rozdělena, zapisujeme symbolem $\mathbb{X} \sim Bi(n, q)$, kde $q \in (0,1)$ a $n \in \mathbf{N}$ jsou parametry rozdělení.

Střední hodnotu binomického rozdělení lze pak určit následujícím výpočtem:

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} q^x (1-q)^{n-x},$$

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = nq \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} q^y (1-q)^{n-1-y} = nq(q+1-q)^{n-1} = nq.$$

3.3.4 Úloha – rozptyl binomického rozdělení

Analogickou cestou, která byla předvedena v posledním odvození, vypočítejte druhý moment binomického rozdělení a z něj ukažte, že pro hodnotu rozptylu platí $\mathrm{D}(\mathbb{X}) = nq(1-q)$.

3.3.5 Uniformní rozdělení

Většina startovních úloh na diskrétní pravděpodobnost pracuje, aniž by si to možná jejich řešitel explicitně uvědomoval, s rozděleními, kdy mají všechny elementární jevy totožnou pravděpodobnost. Hovoříme o **rovnoměrně (uniformně) rozdělené náhodné proměnné**. Sem spadají hody kostkou či mincí, ruleta, losování čísel sportky a podobně. Obecně řečeno se jedná o případy, kdy je výběrový prostor konečný, tj. $E = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, a pravděpodobnostní tabulka je nahrazena jediným vztahem, a sice

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \frac{1}{m}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Střední hodnotou takto rozdělené náhodné proměnné je hodnota

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x=1}^{m} x \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \frac{1}{m} \sum_{x=1}^{m} x = \frac{1}{m} \frac{m}{2}(1+m) = \frac{m+1}{2}$$

odpovídající středu intervalu $\langle 1, m \rangle$. A protože $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1)$, má druhý moment velikost

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) = \sum_{x=1}^{m} x^2 \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \frac{1}{m} \sum_{x=1}^{m} x^2 = \frac{1}{m} \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) = \frac{(m+1)(2m+1)}{6},$$

odkud pak dostáváme, že rozptylem rovnoměrně rozdělené náhodné proměnné je hodnota

$$\mathrm{D}(\mathbb{X}) = \frac{m^2 - 1}{12}.$$

3.3.6 Úloha – pomocný vztah

Pokusme se přímým výpočtem prokázat platnost vztahů

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1).$$

Výpočet zahajme jednoduchou rovností

$$(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1,$$

na jejíž jemnou modifikaci

$$k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1,$$

pak aplikujeme sumu $\sum_{k=1}^{m}$. Tím dostáváme rovnost

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 - \sum_{k=1}^{m} (k-1)^2 = 2 \sum_{k=1}^{m} k - \sum_{k=1}^{m} 1,$$

resp.

$$m^2 = 2\sum_{k=1}^{m} k - m,$$

z níž již přímočaře plyne vztah $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m^2+m}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$. Důkaz druhého ze vztahů zahajme analogicky:

$$(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1,$$

resp.

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1,$$

Sumací pak dostáváme rovnost

$$\sum_{k=1}^{m} k^3 - \sum_{k=1}^{m} (k-1)^3 = 3\sum_{k=1}^{m} k^2 - 3\sum_{k=1}^{m} k + \sum_{k=1}^{m} 1,$$

z níž dále plyne, že

$$m^3 = 3\sum_{k=1}^{m} k^2 - 3\sum_{k=1}^{m} k + m = 3\sum_{k=1}^{m} k^2 - 3\frac{m(m+1)}{2} + m.$$

Odtud pak

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}(2m^3 + 3m^2 + m) = \frac{m}{6}(2m^2 + 3m + 1) = \frac{m}{6}(m+1)(2m+1).$$

3.3.7 Geometrické rozdělení

Jedním z klasických příkladů diskrétního rozdělení je rozdělení, které popisuje, kolik nezdarů musí nastat, než se v sérii nezávislých Bernoulliho pokusů dostaví první úspěšný pokus. Tyto pokusy, kde úspěch $\mathbb{X} = 1$ nastává s pravděpodobností q a neúspěch $\mathbb{X} = 0$ s pravděpodobností $1 - q$, nám umožňují odpovědět na otázky typu „Kolikrát musíte hodit mincí, než padne panna?“ nebo „Jaká je šance, že hráč rulety osmkrát v řadě vsadí na červenou a stále je neúspěšný?“ Tento typ rozdělení nabízí nejen zajímavé výpočty, ale také hlubší pohled do strategie hazardních her.

V matematice o tomto rozdělení hovoříme jako o **geometrickém rozdělení** s parametrem $q \in (0,1)$. Příslušnost náhodné proměnné $\mathbb{X}$ k tomuto rozdělení symbolicky zapisujeme výrazem $\mathbb{X} \sim Geo(q)$. Pravděpodobnostní funkce tohoto rozdělení je tvaru

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = q(1-q)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Snadno nahlédneme, že

$$\sum_{x \in E} \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \sum_{x=0}^{\infty} q(1-q)^x = q\frac{1}{1-(1-q)} = 1,$$

kde jsem využili vzorce

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \tag{3.2}$$

pro součet geometrické řady s kvocientem $a \in (-1, 1)$. Střední hodnotu tohoto rozdělení pak získáme následujícím postupem. Nejprve použijeme rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}, \tag{3.3}$$

která vznikla derivací vzorce (3.2). Její lehkou úpravou obdržíme vztah

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a^m = \sum_{m=0}^{\infty} ma^m + \sum_{m=0}^{\infty} a^m = \sum_{m=0}^{\infty} ma^m + \frac{1}{1-a},$$

odkud pak vidíme, že

$$\sum_{m=0}^{\infty} ma^m = \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} = \frac{a}{(1-a)^2}$$

To pak zužitkujeme ve finálním odvození tvaru střední hodnoty

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x=0}^{\infty} xq(1-q)^x = q\frac{1-q}{(1-(1-q))^2} = \frac{1-q}{q}.$$

3.3.8 Úloha – rozptyl geometrického rozdělení

Ukažte, že rozptyl geometrického rozdělení má hodnotu $\mathrm{D}(\mathbb{X}) = \frac{1-q}{q^2}$.

3.3.9 Poissonovo rozdělení

Mezi diskrétními rozděleními má privilegované postavení tzv. **Poissonovo rozdělení,** jehož výskyt v aplikačních úlohách je velice častý. Toto rozdělení totiž správně modeluje počet výskytů určitých událostí v daném časovém intervalu nebo v určité podoblasti prostoru. To vše ovšem za předpokladu, že se pozorovaná událost vyskytuje náhodně a nezávisle na ostatních výskytech, což znamená, že výskyt jedné události neovlivňuje pravděpodobnost výskytu další události. Příkladem náhodných proměnných, které se tímto rozdělením řídí, jsou ku příkladu:

- Počet zákazníků přicházejících do obchodu za hodinu, pokud je intenzita příchodů relativně stabilní v čase.
- Počet dopravních nehod na určité křižovatce během jednoho dne.
- Počet poruch zařízení během určitého časového úseku (například selhání komponent v serverové místnosti).
- Počet překlepů v určitém množství textu, pokud překlepy vznikají náhodně.
- Počet telefonních hovorů přijatých na zákaznické lince za minutu.
- Počet mutací v určitém úseku DNA za jednotku času.

Poissonovo rozdělení je tedy velmi užitečné pro modelování událostí, které se vyskytují nezávisle a náhodně, ale s určitou stabilní intenzitou v čase nebo prostoru. Jeho kvantitativní podoba je následující:

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \frac{\lambda^x}{x!}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.4}$$

Poissonovsky rozdělenou náhodnou proměnnou označujeme symbolem $\mathbb{X} \sim Poi(\lambda)$, kde $\lambda > 0$ je parametr reprezentující, jak bude patrno z výpočtu střední hodnoty, tzv. **intenzitu procesu.** Správnou normalizaci vztahu (3.4) lze jednoduše prokázat na základě znalosti Maclaurinova rozvoje

$$\mathrm{e}^{ay} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} y^n, \quad y \in \mathbf{R}$$

exponeciální funkce. Chceme-li vypočítat střední hodnotu poissonovsky rozdělené náhodné veličiny, lze to udělat takto:

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} =$$

$$= \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda.$$

Pro druhý moment lze pak postupovat podobně. Konkrétně takto:

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) = \mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{x=0}^{\infty} x^2\frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)\frac{\lambda^x}{(x-1)!} + \mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \mathrm{E}(\mathbb{X}) = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \mathrm{E}(\mathbb{X}) = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} + \mathrm{E}(\mathbb{X}) =$$

$$= \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1).$$

A proto je teoretickým rozptylem náhodné veličiny $\mathbb{X} \sim Poi(\lambda)$ číslo $\mathrm{D}(\mathbb{X}) = \lambda$.

3.3.10 Úloha – střední hodnota a rozptyl Poissonova rozdělení

Pokuste se k právě odvozeným hodnotám střední hodnoty a rozptylu Poissonova rozdělení dostat alternatvní cestou, kdy využijete metodu derivování vztahu

$$\mathrm{e}^{ay} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}y^n, \quad y \in \mathbf{R}$$

podle parametru a.

3.3.11 Úloha – třetí moment Poissonova rozdělení

Libovolnou metodou vypočítejte třetí moment Poissonova rozdělení.

Kapitola 4

Absolutně spojitá náhodná proměnná a její charakteristiky

V této kapitole již opustíme svět jednodušších, tj. diskrétních náhodných proměnných a začneme se zaobírat variantami spojitými, tj. verzemi náhodných proměnných, jejichž výběrový prostor má nespočetně mnoho prvků. Mezi nimi sice – technicky vzato – mohou existovat i jakési hybridní případy, ale my je budeme v těchto skriptech záměrně ignorovat. Jejich výskyt v praktických úlohách je totiž extrémně řídký a jejich konstrukce jsou navíc spíše technické povahy. My se naopak přidržíme praktičtějších verzí, tak zvaných absolutně spojitých náhodných proměnných.

Pro pečlivější čtenáře zde ale uvádíme, že specifičnost výše diskutovaných hybridních proměnných spočívá ve faktu, že jejich výběrový prostor může obsahovat i izolované body, které znemožňují zavedení základních instrumentů používaných pro popis náhodných proměnných. Příkladem může být náhodná veličina rozdělená podle distribuční funkce z obrázku č. XX. Z ní lze vyčíst, že výběrovým prostorem je množina $E = \{1, 2\} \cup \langle 3, 6\rangle$. Součástí této množiny jsou zjevně i izolované body $x = 1$ a $x = 2$. Pro jejich pravděpodobnosti platí, že $\mathcal{P}[\mathbb{X} = 1] = \frac{1}{4}$ a $\mathcal{P}[\mathbb{X} = 2] = \frac{1}{2}$. Dále pak $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle 3, 6\rangle] = \frac{1}{4}$. Právě přítomnost těchto izolovaných bodů znemožňuje stanovit pro tuto hybridní proměnnou tzv. hustotu pravděpodobnosti, což je klíčová vlastnost všech absolutně spojitých náhodných proměnných.

4.1 Hustota pravděpodobnosti

Nechť je dána náhodná proměnná $\mathbb{X}$. Existuje-li pro ni v některých bodech $x \in \mathbf{R}$ limita

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\mathcal{P}[\mathbb{X} < x + \Delta x] - \mathcal{P}[\mathbb{X} < x]}{\Delta x}$$

a platí-li pro ni rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

pak ji nazýváme **hustotou pravděpodobnosti** náhodné proměnné $\mathbb{X}$ a značíme $f_{\mathbb{X}}(x)$, nebo (nemůže-li dojít k záměně s jinou proměnnou) jen stručně $f(x)$. Z prvního ze vztahů lze za použití základních vlastností pravděpodobnosti vyvodit i sérii následujících rovností:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, x + \Delta x)] - \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, x + \Delta x) \setminus (-\infty, x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle x, x + \Delta x)]}{\Delta x} -$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\mathcal{P}[x \leqslant \mathbb{X} < x + \Delta x]}{\Delta x},$$

resp.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\mathcal{P}[\mathbb{X} < x + \Delta x] - \mathcal{P}[\mathbb{X} < x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce náhodné proměnné $\mathbb{X}$. To tedy značí, že ve všech bodech, kde má distribuční funkce derivaci, nutně platí rovnost

$$f(x) = F'(x). \tag{4.1}$$

A protože ze druhé kapitoly víme (viz vztah (2.1)), že $F(x) := \mathcal{P}[\mathbb{X} < x]$, vidíme odsud, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} < x] = F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x) = [F(y)]_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{x} F'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

A to nás přivádí k bezprostředně následující definici.

4.2 Absolutně spojitá náhodná proměnná

Řekneme, že náhodná proměnná $\mathbb{X}$ má **absolutně spojité rozdělení,** existuje-li nezáporná funkce $f(x)$ taková, že pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} < x] = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Funkci $f(x)$ prohlásíme za **hustotu pravděpodobnosti** náhodné proměnné $\mathbb{X}$ a zapisujeme $\mathbb{X} \sim f(x)$.

4.2.1 Příklad – rovnoměrně rozdělená náhodná proměnná

Mějme náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ zadanou prostřednictvím své distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ \frac{x}{3} & 0 < x < 3, \\ 1 & x \geqslant 3. \end{cases}$$

Tato proměnná je absolutně spojitá, neboť k ní lze nalézt příslušnou hustotu pravděpodobnosti. Tou je funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \wedge x \geqslant 3, \\ \frac{1}{3} & 0 < x < 3. \end{cases}$$

Snadno se lze přesvědčit, že pro tyto funkce platí (skoro všude v $\mathbf{R}$, tj. všude kromě bodů $x = 0$ a $x = 3$) rovnost $f(x) = F'(x)$. Úsporně lze výše uvedenou pravděpodobnostní hustotu zapsat také ve tvaru $f(x) = \frac{1}{3}\Theta(x)\Theta(3 - x)$, který výhodně využívá předností Heavisideovy funkce.

4.2.2 Úloha – pravděpodobnost polouzavřeného intervalu

Na základě výsledků v sekci 2.3.1 se pokuste nalézt způsob, jak vyčíslit pravděpodobnost, že výsledkem experimentu $\mathbb{X}$ bude hodnota z polouzavřeného intervalu $\langle a, b)$, kde $-\infty < a < b < +\infty$.

4.2.3 Nezáporná náhodná proměnná

O absolutně spojité náhodné proměnné prohlásíme, že je **nezáporná,** pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí, že je na intervalu $(-\infty, 0)$ všude nebo skoro všude nulová.

Nechť $v(x)$ je výroková formule (výrok), která má smysl pro každé $x \in \mathbf{R}$. Nechť $A \subset \mathbf{R}$ je libovolná množina. Řekneme, že výrok $v(x)$ platí **skoro všude** v množině A, resp. **pro skoro všechna** x z množiny A, jestliže míra (délka) $\lambda(X)$ množiny všech x, kde formule $v(x)$ neplatí, je nula, tj. pro $X = \{x \in \mathbf{R} : \ v(x) = 0\}$ platí rovnost $\lambda(X) = 0$.

4.2.4 Symetricky rozdělená náhodná proměnná

O absolutně spojité náhodné proměnné řekneme, že je **rozdělená symetricky** kolem bodu $a \in \mathbf{R}$, pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí, že

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad f(a + x) = f(a - x).$$

4.2.5 Úvaha o hustotě pravděpodobnosti a její integraci

Pro čtenáře, který vyžaduje hlubší vhled do problematiky absolutně spojitých náhodných proměnných, se nyní krátce zamyslíme nad různými matematickými aspekty, které pro běžného uživatele tohoto aparátu klidně mohou zůstat skryty. Předně si zde ale řekněme, že všechny integrály, o nichž tato skripta pojednávají, jsou integrály lebesgueovské typu. Ačkoli je tento fakt z teoretického hlediska vlastně klíčový pro správné fungování celé teorie pravděpodobnosti, v praktických výpočtech se s rozdílem mezi lebesgueovskou a běžnější riemannovskou integrací vlastně nesetkáme. V těchto skriptech tedy jistě ne. Ale na druhou stranu by to zde pro korektnost všech úvah alespoň jednou padnou mělo. Výhodnost tohoto typu integrace spočívá například v tom, že liší-li se dvě funkce pouze na množině míry nula, pak je hodnota jejich integrálu totožná. To tedy značí, že změníme-li hustotu pravděpodobnosti v konečně nebo dokonce spočetně mnoha bodech, výsledky vyčíslovaných integrálů (a tudíž i výsledky výpočtů pravděpodobností všech jevů) se nezmění. Jedna náhodná veličina může tedy být (pokud bychom chtěli) být popsána vícero hustotami. Například hustota $g(x) = \Theta(x)\mathrm{e}^{-x}$ a hustota

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0\rangle; \\ 1 & x = -2; \\ \mathrm{e}^{-x} & x \in (0, +\infty); \end{cases}$$

definují tutéž náhodnou proměnnou. Asi ovšem nikoho nepřekvapíme tím, že se k popisu náhodné proměnné vždy používá hustota mající nejjednodušší vyjádření. A toho se ve všech dalších úvahách přidržíme i my.

4.2.6 Dodatek o borelovských množinách

Další z výhod, které přinesl lebesgueovských přístup k integracím, je fakt, že je-li nějaká nezáporná funkce **integrabilní** přes celé $\mathbf{R}$, tj. je-li $\int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$, pak je také integrabilní přes zcela libovolnou borelovskou množinu $B \in \mathscr{D}$. Kvantifikátorově to lze zapsat například takto:

$$\int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}_0^+ \quad \Longrightarrow \ (\forall B \in \mathscr{D}) : \ \int_B g(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbf{R}_0^+.$$

Tento teorém nám tedy garantuje, že budeme skutečně schopni vypočítat pravděpodobnosti všech přípustných pravděpodobnostních dotazů tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in B]$, kde $B \in \mathscr{D}$. A zde se právě skrývá odpověď na otázku, proč se pro absolutně spojité náhodné proměnné musíme omezovat pouze na **borelovské dotazy.** Pokud bychom totiž položili dotaz tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in C]$, kde $C \notin \mathscr{D}$, integrál $\int_C g(x)\,\mathrm{d}x$ by existovat nemusel.

4.3 Deskriptivní charakteristiky

Podobně jako bylo možné reprezentovat diskrétní náhodné proměnné jednoduše interpretovatelnými číselnými charakteristikami, bude to možné také pro absolutně spojité proměnné.

4.3.1 Střední hodnota absolutně spojité náhodné proměnné

Střední hodnotou absolutně spojité náhodné proměnné $\mathbb{X}$, popsané hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, rozumíme číslo

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.2}$$

a to za předpokladu, že integrál na pravé straně této rovnosti konverguje.

4.3.2 Úloha – výpočet střední hodnoty

Stanovte střední hodnotu náhodné proměnné z příkladu 4.2.1.

4.3.3 Příklad – střední hodnota symetricky rozdělené proměnné

V tomto příkladě dokážeme, že je-li náhodná proměnná $\mathbb{X}$ rozdělená symetricky kolem bodu $a \in \mathbf{R}$, pak je její střední hodnotou (pokud existuje) nutně $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = a$. Definiční vztah nejprve rozšiřme přičtením a současným odečtením hodnoty a v integrandu. Tím dostaneme rovnost

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a) f(x)\,\mathrm{d}x + a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a) f(x)\,\mathrm{d}x + a.$$

Nyní postačí ukázat, že posledně uvedený integrál je nulový. Proveďme v něm nejdříve rozdělení na dva integrály a poté v každém z nich aplikujme substituci $y = x - a$. To vede na sadu rovností

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} (x-a) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} (x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} y f(y+a)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} y f(y+a)\,\mathrm{d}y.$$

Provedeme-li v prvním integrále záměnu proměnných tvaru $z = -y$ a ve druhém formální záměnu $z = y$, obdržíme vztah

$$\int_{-\infty}^{0} y f(y+a)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} y f(y+a)\,\mathrm{d}y = -\int_{0}^{\infty} z f(a-z)\,\mathrm{d}z + \int_{0}^{\infty} z f(a+z)\,\mathrm{d}z =$$

$$\int_{0}^{\infty} z\left(f(a+z) - f(a-z)\right)\mathrm{d}z = 0,$$

neboť integrand je kvůli symetričnosti analyzované proměnné roven nule. Tím je dokázáno, že $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = a$.

4.3.4 Úloha – výpočet střední hodnoty

Stanovte střední hodnotu náhodné proměnné zadané distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 2, \\ \frac{(x-2)^3}{64} & 2 < x < 6, \\ 1 & x \geqslant 6. \end{cases}$$

4.3.5 Momenty absolutně spojité náhodné proměnné

Je-li pro nějaké $k \in \mathbf{N}$ funkce $x^k f(x)$ integrabilní na množině všech reálných čísel, tj. konverguje-li níže uvedený integrál, pak číslo

$$\mu_k = \mathrm{E}(\mathbb{X}^k) := \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazýváme ***k*–tým momentem** náhodné proměnné $\mathbb{X} \sim f(x)$. Podobně jako u diskrétních proměnných i zde hovoříme v tomto případě o **momentech necentrálních (obecných)**.

Existuje-li první moment $\mu_1 = \mathrm{E}(\mathbb{X})$, pak bývá zvykem zavádět také **momenty centrální**. Ty se definují prostřednictvím rovnosti

$$\varkappa_k := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^k f(x)\,\mathrm{d}x$$

pokud ovšem daný integrál konverguje. Tyto momenty kvantifikují míru, s jakou je náhodná veličina vychýlena od své vlastní střední hodnoty. Mezi centrálními a necentrálními momenty (pokud existují) existují přímý vztah odvozený za pomoci binomické věty, jak lze nahlédnout níže.

$$\varkappa_k := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^k f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_1^{k-i} x^i f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_1^{k-i} \mu_i.$$

4.3.6 Rozptyl a směrodatná odchylka spojité náhodné proměnné

Rozptyl proměnné $\mathbb{X} \sim f(x)$ se střední hodnotou μ_1 definujeme vztahem

$$\mathrm{D}(\mathbb{X}) := \int_{\mathbf{R}} (x - \mu_1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odmocnina z něj se pak nazývá **směrodatnou odchylkou.**

4.3.7 Úloha – úprava vztahu pro ropztyl

Samostatně dokažte notoricky známý vztah $\mathrm{D}(\mathbb{X}) := \mu_2 - \mu_1^2$.

4.4 Nejznámější varianty spojitých proměnných

Stejně jakou jsou mezi diskrétními proměnnými určité "protekční"varianty, na něž lze narazit na každém kroku, podobně je tomu také ve světě veličin spojitých. My si zde představíme některé vybrané zástupce.

4.4.1 Uniformní rozdělení – spojitá verze

O náhodné proměnné $\mathbb{X} \sim f(x)$ řekneme, že podléhá **rovnoměrnému (uniformnímu) rozdělení,** existují-li čísla $-\infty < a < b < +\infty$ tak, že pro její hustotu pravděpodobnosti platí rovnost

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant a \wedge x \geqslant b, \\ \frac{1}{b-a} & a < x < b. \end{cases}$$

Ta je navíc ekvivalentní kompaktnímu tvaru $f(x) = \Theta(x-a)\Theta(b-x)/(b-a)$. Pro takto rozdělenou proměnnou snadno učíme jak střední hodnotu

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \int_{\mathbf{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2},$$

tak také druhý moment

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Z těchto hodnot pak ihned vyvozujeme obecný tvar vzorce pro rozptyl:

$$\mathrm{D}(\mathbb{X}) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Povšimněte si, že výsledek střední hodnoty odpovídá zjištění odvozenému v sekci 4.2.4. Uniformně rozdělená náhodná proměnná je totiž symetrická. Příslušnost náhodné proměnné ke spojitému uniformnímu rozdělení zapisujeme zjednodušeným symbolem $\mathbb{X} \sim \mathrm{U}(a,b)$.

4.4.2 Exponenciální rozdělení

Náhodnou proměnnou klasifikujeme jako **exponenciálně rozdělenou,** je-li její hustotou pravděpodobnosti funkce

$$f(x) = \Theta(x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

kde $\lambda > 0$ je parametr. Příslušnost náhodné proměnné k exponenciálnímu rozdělení zapisujeme zjednodušeným symbolem $\mathbb{X} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Elementárními výpočty lze ukázat, že

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{D}(\mathbb{X}) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exponenciální rozdělení věrohodně modeluje statistiku časových intervalů měřených mezi výskytem dvou po sobě následujících událostí v procesech, v nichž nejsou jednotlivé události žádným způsobem vzájemně korelované. Příkladem takového systému může být příchod hovorů do call centra, případně čas mezi rozpady radioaktivních atomů. Exponenciální rozdělení se často používá ve spolehlivostní analýze, teorii front a modelování náhodných procesů. Jeho klíčovou vlastností je bezpaměťovost, což znamená, že pravděpodobnost události nezávisí na předchozím čase čekání.

4.4.3 Erlangovo rozdělení

Náhodnou proměnnou klasifikujeme jako **erlangovsky rozdělenou,** je-li její hustotou pravděpodobnosti funkce

$$f(x) = \Theta(x)\frac{\lambda^{n+1}}{n!}x^n \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

kde $\lambda > 0$ a $n \in \mathbf{N}$ jsou pevné parametry. Příslušnost náhodné proměnné k exponenciálnímu rozdělení zapisujeme zjednodušeným symbolem $\mathbb{X} \sim \mathrm{Erl}(n, \lambda)$. Ze znalosti vztahu

$$\int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{m!}{\lambda^{m+1}}$$

pak snadno vyviozujeme, že

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^{n+1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}} = \frac{n+1}{\lambda}.$$

Podobně také

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^{n+2} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}} = \frac{(n+2)(n+1)}{\lambda^2}.$$

Odtud už vidíme, že hodnotou rozptylu zkoumané proměnné je číslo

$$\mathrm{D}(\mathbb{X}) = \frac{(n+2)(n+1)}{\lambda^2} - \frac{(n+1)^2}{\lambda^2} = \frac{n+1}{\lambda^2}.$$

Erlangovo rozdělení je flexibilnější verzí exponenciálního rozdělení, protože umožňuje modelovat situace, kdy je pro výskyt analyzovaného jevu nutné čekat na splnění více podmínek. Je proto vhodným rozdělením například pro odhad celkové doby opravy složitého zařízení, kdy je oprava zařízení rozdělena do několika fází s exponenciálně rozdělenými trváními, nebo pro modelování životnosti některých biologických procesů, při nichž organismus prochází několik fází degradace.

4.4.4 Příklad – pomocné integrály

V tomto příkladě se pokusíme odvodit vztah pro hodnotu integrálu $\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x$, kde $\alpha > 0$. Poměrně banálně se přesvědčíme, že

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}.$$

Budeme-li tento vztah derivovat podle α, tj. užijeme-li větu o derivaci integrálu podle parametru, dostaneme po formální aplikaci derivace vztah

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\alpha^n} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\alpha^n}(\alpha^{-1}) = (-1)^n \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Odtud tedy

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}. \tag{4.3}$$

Korektně tento vztah prokážeme matematickou indukcí. Předpokládejme tedy, že platí vztah (4.3). Ten zcela zjevně platí alespoň pro variantu $n = 0$. Pokusme se následně prokázat jeho platnost pro $\int_0^\infty x^{n+1} \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x$. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru je třeba prokázat, že hodnota integrálu (4.3) existuje alespoň pro jedno $\alpha > 0$, což je zřejmé, dále že integrand $x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}$ je měřitelnou funkcí, což je vzhledem k jeho spojitosti rovněž triviální, a v poslední řadě že existuje integrabilní majoranta k derivaci původního integrandu podle parametru α, která je nezávislá na hodnotě α. Jelikož pro $0 < \alpha_0 < \alpha$ platí

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} (x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}) \right| = \left| -x^{n+1} \mathrm{e}^{-\alpha x} \right| \leqslant x^{n+1} \mathrm{e}^{-\alpha_0 x} \in \mathscr{L}(0, +\infty),$$

je i třetí předpoklad věty prokázán. Pak tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty x^{n+1}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right) = -\frac{(n+1)\,n!}{\alpha^{n+2}}.$$

Odtud

$$\int_0^\infty x^{n+1}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{(n+1)!}{\alpha^{n+2}},$$

což finalizuje prováděný důkaz.

4.4.5 Gamma funkce

Tu a tam je v matematice nezbytné opustit komfortní zónu standardních funkcí a pracovat s tzv. speciálními funkcemi. Těch je v matematice celá řada. Jednou z nejznámějších je tzv. **Gamma funkce.** Ta je definována předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{4.4}$$

Jak pochopíme později, představuje Gamma funkce jakési spojité rozšíření funkce faktoriálu.

Věta – o vlastnostech Gamma funkce

Pro všechna $x > 0$ a všechna $\alpha > 0$ platí rovnosti

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}. \tag{4.5}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno provedeme (aplikací metody per partes) následující sadu výpočtů

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

- a podobně snadno také

$$\int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} y = \alpha t \\ \mathrm{d}y = \alpha\mathrm{d}t \end{array}\right| = \frac{1}{\alpha^x}\int_0^\infty y^{x-1}\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}$$

Věta – o vybraných hodnotách Gamma funkce

Nechť $n \in \mathbf{N}$. Pak platí:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\frac{(2n-1)!!}{2^n}.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- pro $n \in \mathbf{N}$ lze dokazovanou rovnost snadno odvodit opakovaným derivováním vztahu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

  podle α a následným dosazením $\alpha = 1$ (viz příklad 4.4.4)

- dále pak

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{c} t=x^2 \\ \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x \end{array}\right|=2\int_0^\infty x^{2n}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n},$$

kde bylo využito výsledku příkladu 4.4.9

4.4.6 Gamma rozdělení

Gamma rozdělení je spojité pravděpodobnostní rozdělení definované dvěma parametry: tvarovým parametrem $\alpha > -1$ a měřítkovým parametrem $\lambda > 0$. Matematicky je jeho hustota pravděpodobnosti definována vztahem

$$f(x)=\Theta(x)\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(n+1)}\,x^\alpha \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

kde $\Gamma(x)$ je Gamma funkce. Mezi procesy modelované gamma rozdělením patří například

- Doba do výskytu událostí v Poissonově procesu: Pokud události přicházejí podle pravidel Poissonova procesu s intenzitou λ, pak doba do výskytu k–té události je Gamma rozdělená s parametry $\alpha = k$ a λ.
- Modelování variability doby trvání procesů. Používá se k modelování doby trvání událostí, jako je doba oprav zařízení, doba čekání na obsluhu v servisních systémech nebo délka životnosti některých biologických procesů.
- Finanční a pojistné modely: Používá se k modelování nákladů v pojistné matematice, například k modelování kumulativních nákladů v čase nebo velikosti škod.

4.4.7 Úloha – momenty Gamma rozdělení

Samostatně vypočtěte hodnoty všech momentů Gamma rozdělení.

4.4.8 Gaussova funkce a Gaussovy integrály

Funkci tvaru $g(x) = \mathrm{e}^{-a(x-\mu)^2}$, $a > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$, a různé její deriváty bývá v matematice zvykem označovat za **Gaussovu funkci.** Její uplatnění v přírodních vědách je opravdu pestré. My zde ale nejprve vyčíslíme hodnotu tzv. **Gaussova integrálu** $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ pro $a > 0$. Při výpočtu užijeme s výhodou Fubiniovy věty. Podle ní totiž

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ay^2}\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} x=\varrho\cos(\varphi) & \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi \\ y=\varrho\sin(\varphi) & \end{array}\right|=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\varrho\,\mathrm{e}^{-a\varrho^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho=\frac{\pi}{a}.$$

Odtud pak snadno nahlédneme, že

$$\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{4.6}$$

4.4.9 Příklad – integrály Gaussova typu

V tomto příkladě vypočteme hodnoty integrálů $\int_0^\infty x^k \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ pro $k \in \mathbf{N}$ a $a > 0$. Řešení rozdělíme na dva případy. Je-li k liché, tj. existuje-li $n \in \mathbf{N}$ tak, že $k = 2n + 1$, pak

$$\int_0^\infty x^k \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\, x^{2n} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = x^2 \\ \mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^n \mathrm{e}^{-ay}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}},$$

kde bylo využito výsledku příkladu 4.4.4. Je-li k sudé, tj. existuje-li $n \in \mathbf{N}$ tak, že $k = 2n$, pak lze hledaný vztah získat derivováním vztahu (4.6). Snadno tak ukážeme, že

$$\int_0^\infty x^{2n} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} a^{-\frac{2n+1}{2}} \tag{4.7}$$

Platnost tohoto vztahu prokážeme opět matematickou indukcí. Pro $n = 1$ vztah zjevně platí. Indukčním předpokladem je tedy vztah (4.7). Derivujme ho podle α. Odtud

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\int_0^\infty x^{2n} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x\right) = -\int_0^\infty x^{2n+2} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} a^{-\frac{2n+1}{2}}\right) = -\sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\frac{2n+1}{2} a^{-\frac{2n+3}{2}},$$

odkud pak ihned plyne, že

$$\int_0^\infty x^{2n+2} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\frac{(2n+1)!!}{2^{n+2}} a^{-\frac{2n+3}{2}},$$

což prokazuje platnost vztahu (4.7) pro všechna $n \in \mathbf{N}$. To, že byla výše provedená záměna derivace a integrálu operací oprávněnou, prokáže laskavý čtenář samostatně podle návodu prezentovaného v příkladě 4.4.4.

4.4.10 Normální (Gaussovo) rozdělení

Normální rozdělení představuje jeden z nejdůležitějších konceptů matematiky, zejména tedy v částech o teorii pravděpodobnostní a statistiky. Jeho význam spočívá nejen v jeho přirozeném výskytu v mnoha oblastech vědy, ale i v jeho fundamentálních vlastnostech, které umožňují hluboké analytické zkoumání. Ať už jde o biologické charakteristiky populace, chyby měření či dynamiku finančních trhů, normální rozdělení se neustále objevuje jako věrohodný model popisující přirozenou variabilitu mnoha jevů. Jeho symetrie, elegantní matematická struktura a úzké propojení s tzv. **centrálním limitním teorémem** z něj činí klíčový nástroj pro porozumění náhodnosti ve světě kolem nás. Než však přistoupíme k jeho rigorózní definici, je důležité si uvědomit, proč je právě toto rozdělení je tak výjimečné a jaké principy vedou k jeho univerzálnosti.

Centrální limitní teorém (CLT) je jeden z nejdůležitějších výsledků teorie pravděpodobnosti a statistiky. Stručně řečeno, říká, že součet nebo průměr velkého počtu nezávislých náhodných proměnných, které mají stejné rozdělení s konečným rozptylem, se přibližně řídí normálním rozdělením, a to bez ohledu na původní rozdělení těchto proměnných. Formálněji to lze zapsat takto: Nechť $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n$ jsou nezávislé a identicky rozdělené náhodné proměnné se střední hodnotou $\mathrm{E}(\mathbb{X}_i) = \mu$ a rozptylem $\mathrm{D}(\mathbb{X}_i) = \sigma^2$, kde $0 < \sigma^2 < \infty$. Pak platí, že pro standardizovanou sumu

$$\mathbb{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathbb{X}_i - \mu}{\sigma} \right)$$

platí asymptoticky

$$\mathbb{Z}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad \text{když } n \to \infty.$$

To znamená, že s rostoucím počtem pozorování n se rozdělení součtu (nebo průměru) těchto proměnných blíží normálnímu rozdělení $N(\mu, \sigma^2/n)$.

Normální rozdělení věrohodně popisuje mnoho přirozených a sociálních jevů, zejména pokud jsou ovlivněny mnoha nezávislými faktory s malými individuálními efekty. Mezi nejčastější příklady normálně distribuovaných procesů či jevů patří:

- Biologické a fyziologické vlastnosti — například výška, hmotnost, krevní tlak nebo IQ ve velké populaci.
- Chyby měření — při měření fyzikálních veličin často dochází k náhodným odchylkám, které se řídí normálním rozdělením.
- Ekonomické a finanční jevy — například výnosy investic za určitých podmínek nebo fluktuace tržních cen.
- Sociální jevy — například výsledky testů ve velké populaci studentů nebo rozdělení doby reakce v psychologických experimentech.
- Přirozené procesy v přírodních vědách — například chyby v astronomických měřeních nebo rozložení částic v určitém prostoru.

Normální rozdělení je také základem mnoha statistických metod a často se používá jako přibližný model i v případech, kdy rozdělení dat není dokonale normální, ale dostatečně symetrické a unimodální.

O náhodné proměnné $\mathbb{X}$ řekneme, že je **normálně rozdělená**, což označíme symbolicky takto: $\mathbb{X} \sim N(\mu, \sigma)$, pokud existují čísla $\mu \in \mathbf{R}$ a $\sigma > 0$ taková, že hustotou pravděpodobnosti proměnné $\mathbb{X}$ je funkce

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.8}$$

Na základě výsledku příkladu 4.4.8 se ze lze snadno přesvědčit, že hustota (4.8) je správně normovaná. To je vidět z následujícího výpočtu:

$$\int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{array}{l} y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\sigma} \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = 1.$$

Grafickou představu o průběhu Gaussovy hustoty (4.8) dává obrázek 4.3. Na něm je vyobrazeno statistické rozdělení okamžitých rychlostí vozidel měřených na dálnici D1 za různých dopravních hustot.

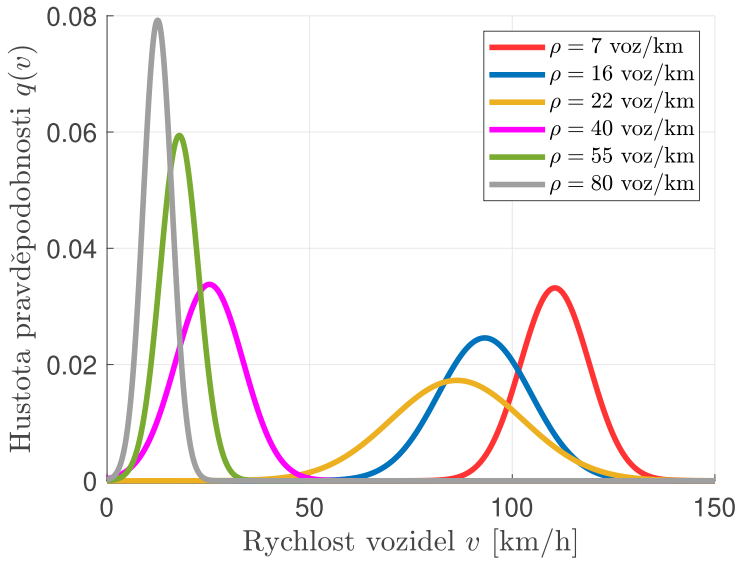

Figure 4.3
Rozdělení rychlostí vozidel v závislosti na aktuální hustotě provozu. Rychlost je ve všech hustotních pásmech rozdělena normálně.

Střední hodnotou normálně rozdělené náhodné proměnné je hodnota

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \int_{\mathbf{R}} x\, g(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbf{R}} x\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbf{R}} (x-\mu)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x = \mu,$$

protože integrál $\int_{\mathbf{R}} (x-\mu)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x$ je vzhledem k symetrii nulový a posledně uvedený integrál (společně s faktorem $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$) je roven jedné kvůli normalizaci. Při výpočtu druhého momentu postupujeme obdobě, když výraz za integrálem rozšíříme tak, aby se v něm objevil na kvadrát $(x-\mu)^2$.

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2\, g(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbf{R}} x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbf{R}} (x-\mu)^2\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbf{R}} x \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x - \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbf{R}} (x-\mu)^2\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x + 2\mu\mathrm{E}(\mathbb{X}) - \mu^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbf{R}} (x-\mu)^2\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x + \mu^2 =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\sigma} \end{array} \right\| = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} y^2\, \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y = \mu^2 + \sigma^2,$$

kde bylo užito vztahu (4.7). Z tohoto výsledku pak přímočaře vyvozujeme, že rozptylem normálně rozdělené náhodné proměnné $\mathbb{X} \sim N(\mu, \sigma)$ je $\mathrm{D}(\mathbb{X}) = \sigma^2$.

4.5 Sumář deskriptivních charakteristik

V posledním oddíle této kapitole přehledne sumarizujeme deset základních deskriptivních charakteristik absolutně spojitých náhodných proměnných. Některé z nich jsme již diskutovali v předešlých částech textu (střední hodnotu, rozptyl, momenty, směrodatná odchylka), ale s některými se setkáme až nyní.

4.5.1 Charakteristiky nosiče

Uvažujme náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ popsanou hustotou pravděpodobnosti $g(x)$. A předpokládejme navíc, že tato funkce je po částech spotitá, tj. $g(x) \in PC(\mathbf{R})$. **Nosičem** náhodné proměnné $\mathbb{X}$ (z anglického support) rozumíme množinu

$$\operatorname{supp}(\mathbb{X}) := \{x \in \mathbf{R} : \ g(x) > 0\}.$$

Levým, resp. **pravým pomezím** náhodné proměnné $\mathbb{X}$ (z anglického ambit) rozumíme čísla

$$\operatorname{amb}_{\mathrm{L}}(\mathbb{X}) := \inf \operatorname{supp}(\mathbb{X}), \qquad \operatorname{amb}_{\mathrm{R}} := \sup \operatorname{supp}(\mathbb{X}).$$

Rozdíl těchto dvou hodnot

$$\operatorname{marg}(\mathbb{X}) := \operatorname{amb}_{\mathrm{R}}(\mathbb{X}) - \operatorname{amb}_{\mathrm{L}}(\mathbb{X})$$

pak nazýváme **rozpětím** náhodné proměnné $\mathbb{X}$ (z anglického margin).

4.5.2 Modus

Modusem náhodné proměnné $\mathbb{X} \sim g(x)$ rozumíme bod (anebo množinu bodů)

$$\operatorname{mod}(\mathbb{X}) := \arg\max g(x),$$

které tedy představuje bod (případně i více bodů), kde nabývá příslušná hustota svého globálního maxima.

4.5.3 Medián

Medián spojité náhodné proměnné $\mathbb{X}$ je nejmenší hodnota, která dělí výběrový prostor náhodné proměnné na dvě stejně pravděpodobné části. Zhruba řečeno, leží 50 % hodnot pod mediánem a 50 % naopak nad ním. Protože by ale takto populárně formulovaná definice nevedla k jednoznačnému určení mediánu, je matematicky korektní definící **mediánu** vztah

$$m(\mathbb{X}) = \inf\left\{x \in \mathbf{R} : \ F(x) \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Tento vztah je navíc (ze zřejmých důvodů) ekvivalentní vztahu

$$m(\mathbb{X}) = \inf\left\{x \in \mathbf{R} : \ F(x) = \frac{1}{2}\right\}.$$

Pokud je distribuční funkce ostře rostoucí na okolí mediánu, nebo dokonce na celém výběrovém prostoru, lze hodnotu mediánu vypočítat ze vztahu $m = F^{-1}(\frac{1}{2})$. Medián náhodné proměnné označuje literatura často také symbolem Q_2.

4.5.4 Kvantily a mezikvartilový ropztyl

Nechť je dáno číslo $\alpha \in (0,1)$. α–**kvantil** spojité náhodné proměnné $\mathbb{X}$ je taková hodnota $q_\alpha \in \mathbf{R}$, pro kterou platí, že

$$q_\alpha(\mathbb{X}) = \inf\{x \in \mathbf{R} : \ F(x) \geqslant \alpha\},$$

resp.

$$q_\alpha(\mathbb{X}) = \inf\{x \in \mathbf{R} : \ F(x) = \alpha\},$$

To znamená, že pravděpodobnost, že náhodná proměnná $\mathbb{X}$ nabývá hodnot menších než q_α, je rovna hodnotě α. Čísla $q_{1/4}$ a $q_{3/4}$ pak bývá zvykem nazývat **dolním,** resp. **horním kvartilem.** a značit Q_1, resp. Q_3 Rozdíl hodnot $q_{3/4} - q_{1/4}$ označuje matematická literatura termínem **mezikvartilovým rozptylem** náhodné proměnné $\mathbb{X}$. Značíme $\mathrm{IQV}(\mathbb{X}) := \mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_1$.

4.5.5 Tabulka deskriptivních charakteristik

	Charakteristika	**Význam**
1.	střední hodnota	$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \int_{\mathbf{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x$
2.	roztyl	$\mathrm{D}(\mathbb{X}) = \int_{\mathbf{R}} (x - \mathrm{E}(\mathbb{X}))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
3.	směrodatná odchylka	$\mathrm{SD}(\mathbb{X}) = \sqrt{\mathrm{D}(\mathbb{X})}$
4.	k–tý moment	$\mu_k(\mathbb{X}) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^k) = \int_{\mathbf{R}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x$
5.	k–tý centrální moment	$\varkappa_k(\mathbb{X}) = \int_{\mathbf{R}} (x - \mu_1)^k f(x)\,\mathrm{d}x$
6.	šikmost (skewness)	$\varkappa_3/(\varkappa_2)^{3/2}$
7.	strmost (kurtosis)	$\varkappa_4/(\varkappa_2)^2 - 3$
8.	nosič	$\mathrm{supp}(\mathbb{X}) := \{x \in \mathbf{R} : \ f(x) > 0\}$
9.	levé a pravé pomezí	$\mathrm{amb}_{\mathrm{L}}(\mathbb{X}) := \inf \mathrm{supp}(\mathbb{X}), \quad \mathrm{amb}_{\mathrm{R}}(\mathbb{X}) := \sup \mathrm{supp}(\mathbb{X})$
10.	rozpětí	$\mathrm{marg}(\mathbb{X}) := \mathrm{amb}_{\mathrm{R}}(\mathbb{X}) - \mathrm{amb}_{\mathrm{L}}(\mathbb{X})$
11.	modus	$\mathrm{mod}(\mathbb{X}) := \arg\max f(x)$
12.	medián	$m(\mathbb{X}) = \inf\{x \in \mathbf{R} : \ F(x) = \mathcal{P}[\mathbb{X} < x] = 1/2\}$
13.	α–kvantil	$q_\alpha(\mathbb{X}) = \inf\{x \in \mathbf{R} : \ F(x) = \mathcal{P}[\mathbb{X} < x] = \alpha\}$
14.	dolní kvartil	$Q_1(\mathbb{X}) = q_{1/4}(\mathbb{X})$
15.	horní kvartil	$Q_3(\mathbb{X}) = q_{3/4}(\mathbb{X})$
16.	mezikvartilový rozptyl	$\mathrm{IQV}(\mathbb{X}) := Q_3(\mathbb{X}) - Q_1(\mathbb{X})$

4.6 Grafická vizualizace náhodných proměnných

Ze všech předchozích úvah je zřejmé, že kompletní představu o náhodné proměnné nám poskytne pouze znalost její hustoty pravděpodobnosti, resp. distribuční funkce. Jedině tyto dva nástroje totiž umožňují zodpovědět všechny pravděpodobnostní dotazy, které se dané náhodné proměnné týkají. Naproti tomu deskriptivní charakteristiky nám davají jen kusé informace, protože se jedná většinou jen o číselné reprezentace dané proměnné. V některých případech sice mohou tyto hodnoty zastoupit celou náhodnou proměnnou smysluplně, ale ve většině případů mají jen omezenou použitelnost. Existuje i celá řada praktických úloh, kdy redukce náhodné proměnné na její střední hodnotu totálně poškodí všechny predikce. Proto je nutné přistupovat k interpretaci založené na deskriptivních charakteristikách velice obezřetně.

Přehlednější představu o základních rysech náhodné proměnné než nám poskytují jednotlivé deskriptivní charakteristiky dává tzv. **krabicový graf (box-plot)** náhodné proměnné. Boxplot je vizuální nástroj používaný ke znázornění rozložení souboru dat. Tento graf zobrazuje pět základních statistických hodnot:

- **Minimální hodnota** — nejnižší hodnota (bez odlehlých pozorování).

- **První kvartil** Q_1 — dolní kvartil, tedy hodnota, pod kterou leží 25 % dat.
- **Medián** Q_2 — druhý kvartil.
- **Třetí kvartil** Q_3 — horní kvartil, tedy hodnota, pod kterou leží 75 % dat.
- **Maximální hodnota** — nejvyšší hodnota (bez odlehlých pozorování).

Mezi prvním a třetím kvartilem se nachází **krabice (box)**, která má délku určenou mezikvartilovým rozptylem IQV($\mathbb{X}$), tedy rozpětím mezi Q_1 a Q_3. Krabice tudíž naznačuje, kde se nachází prostředních 50 % hodnot. **Vousy (whiskers)** vycházejí z krabice a obvykle se táhnou k nejnižší, resp. nejvyšší hodnotě, která ještě není považována za odlehlou. **Odlehlé hodnoty (outliers)** bývají vybrazovány jako jednotlivé body ležící mimo tento rozsah. Za odlehlé hodnoty se považují hodnoty ležící mimo interval

$$\left\langle Q_2 - \frac{3}{2}\,\mathrm{IQV}(\mathbb{X})\ ;\ Q_2 + \frac{3}{2}\,\mathrm{IQV}(\mathbb{X})\right\rangle.$$

Boxplot umožňuje rychlé porovnání různých datových sad, identifikaci rozložení hodnot, symetrie či přítomnosti odlehlých hodnot.

4.6.1 Příklad – boxplot spojité náhodné proměnné

Uvažujme náhodnou proměnnou popsanou distribuční funkcí z obrázku 4.4.

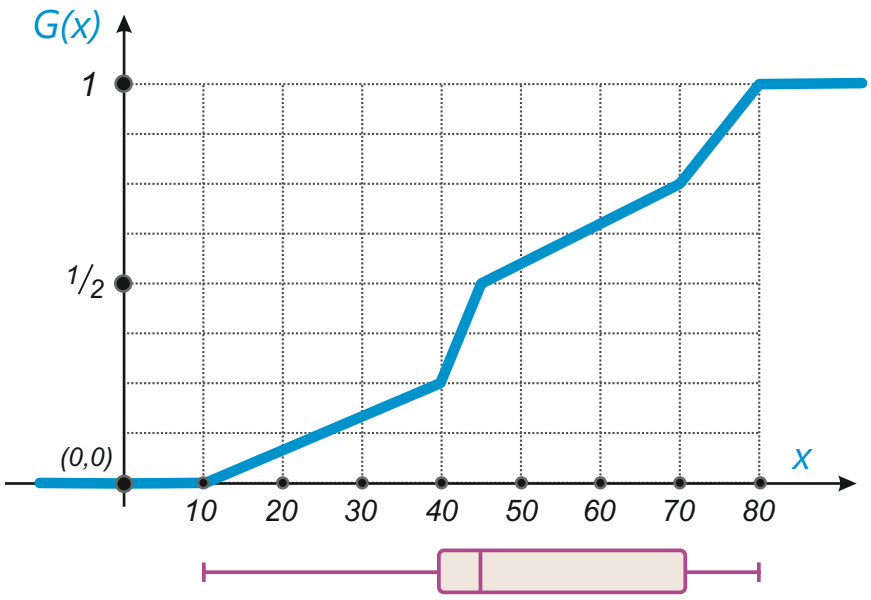

Figure 4.4
Distribuční funkce náhodné proměnné a její krabicový graf (box-plot).

Analýzou tohoto grafu snadno zjišťujeme, že mediánem náhodné proměnné je hodnota $Q_2 = 45$, dolním kvartilem hodnota $Q_1 = 40$ a horním kvartilem $Q_3 = 70$. Mezikvartilový rozptyl mám hodnotu 30. Odtud zjišťujeme, že odlehlé hodnoty, pokud by měly existovat, by musely ležet vně intervalu

$$\left\langle Q_2 - \frac{3}{2}\,\mathrm{IQV}\ ;\ Q_2 + \frac{3}{2}\,\mathrm{IQV}\right\rangle = \left\langle 45 - \frac{3}{2}30\ ;\ 45 + \frac{3}{2}30\right\rangle = \langle 0, 90\rangle.$$

Protože je ale z průběhu distribuční funkce jasné, že výběrovým prostorem zkoumané náhodné proměnné je množina $E = \langle 10, 80 \rangle$, budou vousy krabicového grafu končit právě v bodech $x = 10$ a $x = 90$. Krabicový graf tedy můžeme vykreslit do obrázku 4.4.

Kapitola 5

Operace s náhodnými veličinami

Tato kapitola nám pomůže správně se zorientovat v následujících klíčových otázkách teorie pravděpodobnosti:

- Jak se změní statistické rozdělení dané náhodné veličiny, bude-li tato náhodná veličina násobena kladným číslem, případně bude-li k ní připočtena jistá konstantní hodnota?
- Jakými nástroji lze popisovat vektor dvou (či více) náhodných proměnných?
- Jak se statistické rozdělení dvou náhodných proměnných promítne do rozdělení jejich součtu?
- Jak jsou rozděleny realizace y náhodné proměnné $\mathbb{Y}$, které vznikly aplikací funkce $h(x)$ na realizace x náhodné proměnné $\mathbb{X}$?

Úmluva: V této kapitole a ve všech kapitolách následujících budeme vždy důsledně pracovat pouze s absolutně spojitými náhodnými veličinami.

5.1 Afinní transformace náhodné proměnné

Centrálním tématem této sekce je otázka, jak se změní průběh hustoty pravděpodobnosti $g(x)$ náhodné veličiny $\mathbb{X}$, pokud ji vynásobíme kladným číslem α a poté k ní přičteme fixní hodnotu $\beta \in \mathbf{R}$. Takovou proceduru většinou vystihujeme formalizovaným zápisem

$$\mathbb{Y} = \alpha\mathbb{X} + \beta \quad (\alpha > 0, \beta \in \mathbf{R}),$$

který říká, že náhodná proměnná $\mathbb{Y}$ vznikla **afinní transformací** proměnné $\mathbb{X}$. Hledání odpovědi na tuto otázku není nijak složité. Pokud například víme, že mzda zaměstnanců jisté firmy má rozdělení (viz obrázek 5.5)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \cdot A}\, \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{(x-\mu)^2-\sigma^2}}, & |x-\mu| < \sigma, \\ 0 & |x-\mu| \geqslant \sigma, \end{cases}$$

kde $\mu = 75.000\,\text{Kč}$ je průměrná mzda, $\sigma = 25.000\,\text{Kč}$ je pološířka nosiče a $A = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}\,\mathrm{d}x \approx 0.4439940$ je normalizační konstanta, pak není těžné zodpovědět, jak je rozdělena stejná mzda vyčíslená v EUR. Je-li $\mathbb{X}$ mzda vyčíslená v CZK (Kč), pak je její euro-ekvivalent $\mathbb{Y}$ jen afinně transformovaným obrazem proměnné $\mathbb{X}$. Konkrétně platí, že $\mathbb{Y} = \mathbb{X}/25$ – pokud tedy uvažujeme kurz 25 korun za jedno euro. Rozdělení náhodné proměnné $\mathbb{Y}$ lze pak získat víceméně intuitivně (viz obrázek 5.6).

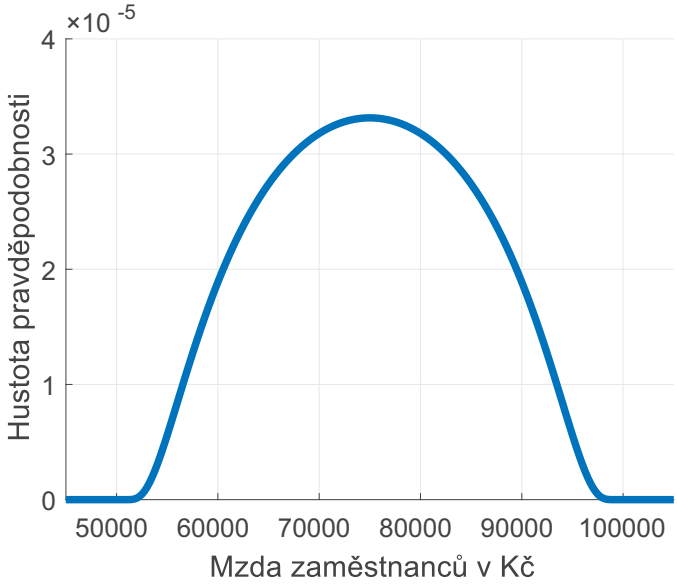

Figure 5.5
Statistické rozdělení mzdy v korunách popsané hustotou pravděpodobnosti (5.1).

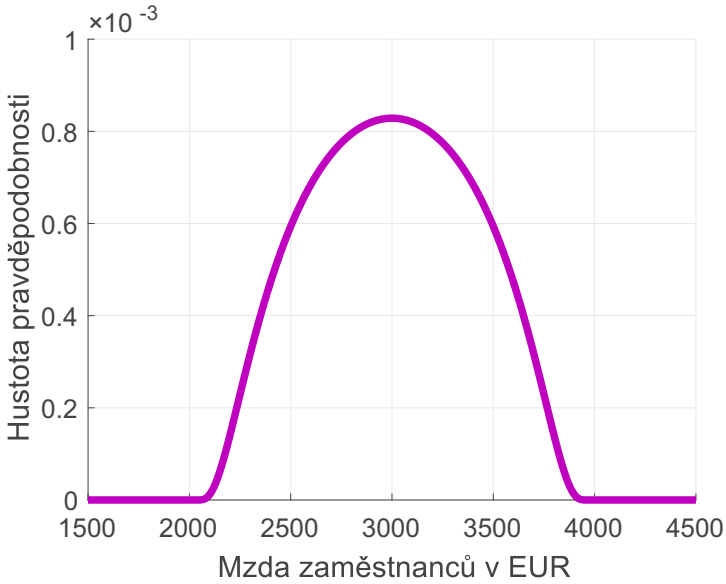

Figure 5.6
Statistické rozdělení mzdy v eurech popsané hustotou pravděpodobnosti (5.1).

Jedná se totiž o hustotu pravděpodobnosti

$$h(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \cdot A}\, \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{(y-\mu)^2-\sigma^2}}, & |y-\mu| < \sigma, \\ 0 & |y-\mu| \geqslant \sigma, \end{cases}$$

kde $\mu = 3.000\,\mathrm{EUR}$ a $\sigma = 1.000\,\mathrm{EUR}$. Celý nosič $(50.000; 100.000)$ se totiž dělením číslem 25 nutně (při zachování tvaru hustoty pravděpodobnosti) zúžil na interval $(2.000; 4.000)$. Na toto zkrácení

rozpětí nosiče musely nutně reagovat funkční hodnoty nové hustoty pravděpodobnosti, aby i pro novou hustotu $h(y)$ platilo, že obsah plochy pod jejím grafem je roven jedné. To je faktický důvod pro odlišnosti měřítek vertikálních os obou posledně vyobrazených grafů. Ani předpis nové hustoty pravděpodobnosti není tudíž složité odvodit. Je to funkce tvaru

$$h(y) = \frac{1}{\alpha} g\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

kde $\alpha = 1/25$.

Nyní si ale odvodíme hustotu pravděpodobnosti affině transformované náhodné proměnné $\mathbb{Y} = \alpha\mathbb{X} + \beta$ exaktně. Symbolem $H(y)$ označme její distribuční funkci. Pro ni platí jedna obecně známá rovnost $H(y) = \int_{-\infty}^{y} h(z)\,\mathrm{d}z$, ale také série vztahů

$$H(y) = \mathcal{P}[\mathbb{Y} < y] = \mathcal{P}[\alpha\mathbb{X} + \beta < y] = \mathcal{P}\left[\mathbb{X} < \frac{y-\beta}{\alpha}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{y-\beta}{\alpha}} g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\| z = \frac{y-\beta}{\alpha} \right\| = \int_{-\infty}^{y} g\left(\frac{z-\beta}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}z.$$

porovnáním obou posledně uvedených vztahů pro $H(y)$ jednoduše čteme, že hustotou pravděpodobnosti náhodné proměnné $\mathbb{Y}$ je funkce

$$h(y) = \frac{1}{\alpha} g\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right). \tag{5.1}$$

5.1.1 Úloha – afinní transformace exponenciálně rozdělené proměnné

Nechť má náhodná proměnná $\mathbb{X}$ rozdělení popsané hustotou

$$g(x) = 8\Theta(x)\mathrm{e}^{-8x}.$$

Jaké rozdělení má proměnná $\mathbb{Y} = \mathbb{X}/2 + 3$? Funkci vykreslete.

5.1.2 Střední hodnota afinně transformované proměnné

Zamysleme se nad otázkou, jak se afinní transformací $\mathbb{Y} = \alpha\mathbb{X} + \beta$ změní základní deskriptivní charakteristiky. Vypočtěme nejprve střední hodnotu. Pro ni platí

$$\mathrm{E}(\mathbb{Y}) = \int_{\mathbf{R}} y\,h(y)\,dy = \int_{\mathbf{R}} \frac{y}{\alpha} g\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\mathrm{d}y = \left\| x = \frac{y-\beta}{\alpha} \right\| = \int_{\mathbf{R}} (\alpha x + \beta) g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \alpha \int_{\mathbf{R}} x\,g(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta.$$

To tedy značí, že střední hodnota se tranformuje podle stejného vztahu jako sama náhodná proměnná.

5.1.3 Rozptyl afinně transformované proměnné

Postupme dále. Pro druhý moment analogicky platí, že

$$\mathrm{E}(\mathbb{Y}^2) = \int_{\mathbf{R}} y^2\,h(y)\,dy = \int_{\mathbf{R}} \frac{y^2}{\alpha} g\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\mathrm{d}y = \left\| x = \frac{y-\beta}{\alpha} \right\| = \int_{\mathbf{R}} (\alpha x + \beta)^2 g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \alpha^2 \int_{\mathbf{R}} x^2\,g(x)\,\mathrm{d}x + 2\alpha\beta \int_{\mathbf{R}} x\,g(x)\,\mathrm{d}x + \beta^2 \int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha^2\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) + 2\alpha\beta\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta^2.$$

Proto pro ropztyl proměnné $\mathbb{Y}$ platí, že

$$\mathrm{D}(\mathbb{Y}) = \mathrm{E}(\mathbb{Y}^2) - \mathrm{E}^2(\mathbb{Y}) = \alpha^2\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \alpha^2\mathrm{E}^2(\mathbb{X}) = \alpha^2\mathrm{D}(\mathbb{X}).$$

5.1.4 Úloha – afinní transformace se záporným koeficientem

Samostatně odvoďte, jak vypadá hustota pravděpodobnosti veličiny $\mathbb{Y} = -\alpha\mathbb{X} + \beta$, kde $\alpha > 0$ a $\beta \in \mathbf{R}$.

5.2 Pravděpodobnostní popis náhodného vektoru

V této sekci si ukážeme, jakými nástroji lze popsat vektory o více náhodných proměnných. Hovoříme obvykle o náhodných vektorech. V našem výkladu se omezíme na náhodné vektory tvaru $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ o dvou složkách. Z důvodu lepší čitelnosti budeme náhodné vektory zapisovat jako řádkové, ačkoli v matematice se vektory nejčastěji chápou jako sloupcové. V celé sekci budeme předpokládat, že obě složky vektoru $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ jsou absolutně spojitými náhodnými proměnnými s hustotami pravděpdobnosti $f_1(x)$, $f_2(x)$ a distribučními funkcemi $F_1(x)$, $F_2(x)$. V případě funkcí $F_1(x)$, $F_2(x)$ hovoříme o **marginálních distribučních funkcích** a v případě funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ o **marginálních hustotách pravděpodobnosti.** Vektor

$$\left(\mu_1^{(1)}, \mu_1^{(2)}\right) \equiv (\mathrm{E}(\mathbb{X}_1), \mathrm{E}(\mathbb{X}_2))$$

označujeme za **vektor středních hodnot.** K vyjádření vzájemných vztahů mezi složkami náhodného vektoru slouží v teorii pravděpodobnosti instrument zvaný **kovarianční matice.** Jedná se o čtvercovou matici

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix},$$

kde

$$\sigma_{ik} := \mathrm{E}\left(\left(\mathbb{X}_1 - \mu_1^{(1)}\right) \cdot \left(\mathbb{X}_2 - \mu_1^{(2)}\right)\right).$$

je tzv. **kovariance.** Není těžké rozpoznat, že $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ a $\sigma_{kk} = \mathrm{D}(\mathbb{X}_k)$. Kovarianční matice je tudíž vždy symetrická a na její diagonále leží rozptyly složek náhodného vektoru.

5.2.1 Hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru

Řekneme, že náhodné veličiny $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ mají **sdružené absolutně spojité rozdělení,** jestliže existuje nezáporná funkce $f_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2}(x_1, x_2)$ taková, že

$$F_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2}(t_1, t_2)\, \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_1 \tag{5.2}$$

pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$. Funkci $f_{\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2}(\vec{x})$ nazýváme **sdruženou hustotou pravděpodobnosti** náhodného vektoru $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$.

5.2.2 Nezávislé náhodné proměnné

Jsou-li $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ náhodné proměnné, pak jejich **sdruženou distribuční funkci** definujeme pro všechna $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ předpisem

$$F_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(x, y) = \mathcal{P}\left(\mathbb{X} < x \ \wedge \mathbb{Y} < y\right). \tag{5.3}$$

Ačkoli mohou být náhodné proměnné $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ (v nejobecnějším pojetí) vzájemně korelované, v teorii pravděpodobnosti se velice často pracuje s variantou statisticky nezávislých náhodných

proměnných. O náhodných veličinách $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ se prohlásí, že jsou **statisticky nezávislé** právě tehdy, když pro každou dvojici $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ platí rovnost

$$F_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(x, y) = F_{\mathbb{X}}(x) \cdot F_{\mathbb{Y}}(y),$$

tj. sdružená distribuční funkce $F_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(x, y)$ je rovna součinu marginálních distribučních funkcí. Odsud lze ukázat i analogickou vazbu mezi hustotami pravděpodobnosti, tj. že $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé právě tehdy, když

$$f_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(x, y) = f_{\mathbb{X}}(x) \cdot f_{\mathbb{Y}}(y).$$

To tedy znamená, že sdružená hustota pravděpodobnosti dvou náhodných proměnných je součinem jejich marginálních hustot pravděpodobnosti.

5.3 Součet náhodných proměnných

Další ze zásadních otázek pravděpodobnosti je otázka, jakým způsobem získat hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné $\mathbb{Z}$, která vznikla jako součet dvou nezávislých náhodných proměnných $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$. Pro připomenutí: stále se pohybujeme pouze ve světě absolutně spojitých proměnných. Nechť tedy platí (z předpokladu o nezávislosti) $f_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, kde $\mathbb{X} \sim g(x)$ a $\mathbb{Y} \sim h(y)$. Nechť dále

$$\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}.$$

Označme $L(z)$ distribuční funkci náhodné proměnné $\mathbb{Z}$ a pokusme se vyčíslit její tvar. Z definice víme, že $L(z) = \mathcal{P}[\mathbb{Z} < z]$ a také, že

$$L(z) = \int_{-\infty}^{z} \ell(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde $\ell(z)$ je příslušná hustota pravděpodobnosti. Odtud dále

$$L(z) = \mathcal{P}[\mathbb{Z} < z] = \mathcal{P}[\mathbb{X} + \mathbb{Y} < z] = \iint_{x+y<z} f_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \iint_{x+y<z} g(x) \cdot h(y)\,\mathrm{d}(x, y).$$

Tento dvojrozměrný integrál můžeme aplikací Fubiniovy věty vypočítat postupným jednorozměrným integrováním, kdy integrujeme nejprve podle proměnné x (vnitřní integrál) a poté podle y (vnější integrál). Odtud tedy

$$L(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} g(x)\,\mathrm{d}x \right) h(y)\,\mathrm{d}y = \left\| \begin{array}{c} x = s - y \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}s \end{array} \right\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} g(s - y)\,\mathrm{d}s \right) h(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(s - y)\,h(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}s \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{z} \ell(s)\,\mathrm{d}s.$$

Analýzou tohoto výsledku zjišťujeme, že hustotou pravděpodobnosti souštu dvou nezávislých náhodných veličin je funkce

$$\ell(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,g(z - y)\,\mathrm{d}y.$$

Výraz na pravé straně nazýváme **konvolucí funkcí** $g(x)$ a $h(y)$. Tuto zcela novou operaci označujeme znakem $*$ a s jeho pomocí zapisujeme

$$\ell(z) = (h * g)(z).$$

5.3.1 Příklad – normalizace hustoty pravděpodobnosti pro součet

V tomto příkladě potvrdíme fakt, že hustota pravděpdobnosti $\ell(z)$ vzniklá konvolucí dvou jiných hustot pravděpodobnosti je správně normovaná, tj. že $\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(z)\,\mathrm{d}z = 1$. Postupjeme přímým výpočtem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,g(z-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(z-y)\,\mathrm{d}z\right)h(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} x = z - y \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{array} \right\| = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x\right)h(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

A tím je správnost normalizace potvrzena.

5.3.2 Úloha – vlastnosti konvoluce

Dokažte, že operace konvoluce je bilineární (lineární v obou argumentech) a komutativní.

5.3.3 Střední hodnota součtu náhodných proměnných

Tématem pro další úvahy je otázka, jak ovlivňují střední hodnoty náhodných proměnných $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ střední hodnotu jejich součtu. Dosaďme tedy do definiční vztahu pro střední hodnotu proměnné $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ a standardně upravujme:

$$\mathrm{E}(\mathbb{Z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\,\ell(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} z \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,g(z-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} z\,g(z-y)\,\mathrm{d}z\right)h(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} x = z - y \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{array} \right\| = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)g(x)\,\mathrm{d}x\right)h(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty} y\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x\right)h(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \mathrm{E}(\mathbb{X})\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty} y\,h(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{E}(\mathbb{X}) + \mathrm{E}(\mathbb{Y}).$$

Výsledkem tohoto odvození je tedy skutečnost, že střední hodnotou součtu dvo nezávislých náhodných veličin je součet jejich středních hodnot.

5.3.4 Rozptyl součtu náhodných proměnných

Pro výpočet rozpočtu je nejprve výhodné stanovit hodnotu druhého momentu náhodné proměnné $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$. Tuto získáme takto:

$$\mathrm{E}(\mathbb{Z}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\ell(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,g(z-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\,g(z-y)\,\mathrm{d}z\right)h(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} x = z - y \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{array} \right\| = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)^2 g(x)\,\mathrm{d}x\right)h(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x\right)h(y)\,\mathrm{d}y + 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)y\,h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x\right)y^2 h(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,\mathrm{d}y + 2\mathrm{E}(\mathbb{X}) \int_{-\infty}^{+\infty} y\,h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 h(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) + 2\mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}) + \mathrm{E}(\mathbb{Y}^2).$$

Po vyčíslení druhého momentu pouze dosadíme do obligátní formule

$$\mathrm{D}(\mathbb{Z}) = \mathrm{E}(\mathbb{Z}^2) - \mathrm{E}^2(\mathbb{Z}) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) + 2\mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}) + \mathrm{E}(\mathbb{Y}^2) - (\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \mathrm{E}(\mathbb{Y}))^2 =$$

$$= \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \mathrm{E}^2(\mathbb{X}) + \mathrm{E}(\mathbb{Y}^2) - \mathrm{E}^2(\mathbb{Y}) = \mathrm{D}(\mathbb{X}) + \mathrm{D}(\mathbb{Y}).$$

To tedy značí, že rozptyl součtu dvou nezávislých náhodných proměnných se rovná součtu rozptylů obou sčítanců.

5.3.5 Úloha – zjednodušení výpočtu konvoluce pro nezáporné proměnné

Samostatně ukažte, že definiční vztah

$$\ell(z) = (h * g)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,g(z-y)\,\mathrm{d}y$$

pro konvoluci lze pro případ, kdy je jak $X \sim g(x)$, tak $Y \sim h(y)$ nezápornou náhodnou proměnnou, výrazně zjednodušit, a to do tvaru

$$\ell(z) = (h * g)(z) = \Theta(x) \int_{0}^{x} h(y)\,g(z-y)\,\mathrm{d}y.$$

5.4 Transformace náhodné proměnné

Poslední z problémů, které hodláme v rámci této kapitoly diskutovat, je otázka, jak se budou statisticky distribuovat realizace y náhodné proměnné $\mathbb{Y}$, které byly vypočteny na základě vztahu $y = H(x)$, kde $H: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je funkce a x jsou realizace náhodné proměnné $\mathbb{X} \sim f(x)$. Cílem je tedy hledat hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné $\mathbb{Y} = H(\mathbb{X})$, resp. její závislost na hustotě pravděpodobnosti $f(x)$.

Aby byla tato úloha dobře definována, je třeba z našich úvah vyloučit ty případy, kdy má zobrazení H na proměnnou $\mathbb{X}$ "devastující učinky." Některé ze zobrazení H totiž deformují původní proměnnou $\mathbb{X}$ natolik, že proměnná $\mathbb{Y} = H(\mathbb{X})$ není dobře (anebo dokonce vůbec) definována, nebo vůbec není náhodnou proměnnou. Proto bude uvažovat pouze zobrazení (funkce), které jsou spojitě diferencovatelné a nikde ve výběrovém prostoru E proměnné $\mathbb{X}$ nanabývají nulové hodnoty derivace, tj.

$$\forall x \in \mathrm{supp}(f): \quad H'(x) \neq 0.$$

5.4.1 Věta o transformaci náhodné proměnné

Nechť $\mathbb{X}$ je absolutně spojitá náhodná veličina popsaná hustotou pravděpodobnosti $f(x)$. Nechť $H: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je ryze monotónní funkce na celém výběrovém prostoru E náhodné proměnné $\mathbb{X}$. Nechť H je navíc diferencovatelná na E. Potom náhodná proměnná $\mathbb{Y} = H(\mathbb{X})$ je také absolutně spojitou náhodnou proměnnou a pro její hustotu pravděpodobnosti $g(y)$ platí, že

$$g(y) = f(H^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}y}(y) \right|.$$

<u>*Důkaz:*</u>

Nejprve si uvědomme, že je-li diferencovatelná funkce H ryze monotónní na celém výběrovém prostoru E, pak to znamená, že $\forall x \in E: \quad H'(x) \neq 0$. Jinými slovy: buď $H'(x) > 0$ všude v E, anebo naopak $H'(x) < 0$. Z věty o derivaci inverzní funkce jedné proměnné pak bezprostředně vyplývá, že k funkci $y = H(x)$ existuje všude v E inverzní funkce $x = H^{-1}(y)$, která je také diferencovatelná a navíc pro ni platí vztah:

$$\frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_0) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}(x_0)} = \frac{1}{H'(x_0)},$$

kde $y_0 = H(x_0)$. Nyní již můžeme přistoupit k samotnému důkazu hlavní části tvrzení. Uvažujme nejprve variantu, kdy $H(x)$ je ryze rostoucí. Pro distribuční funkci náhodné proměnné $\mathbb{Y}$ snadno dostáváme:

$$G(y) = \mathcal{P}[\mathbb{Y} < y] = \mathcal{P}[H(\mathbb{X}) < y] = \mathcal{P}[\mathbb{X} < H^{-1}(y)] = F(H^{-1}(y)).$$

A protože hustota pravděpodobnosti je derivací distribuční funkce, dostáváme odtud (aplikací věty o derivaci složené funkce), že

$$g(y) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(F(H^{-1}(y))\right) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(H^{-1}(y)) \cdot \frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}y}(y) = f(H^{-1}(y)) \cdot \frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}y}(y).$$

Pro variantu, kdy je transformační funkce $H(x)$ ryze klesající, podobně dostáváme:

$$G(y) = \mathcal{P}[\mathbb{Y} < y] = \mathcal{P}[H(\mathbb{X}) < y] = 1 - \mathcal{P}[H(\mathbb{X}) \geqslant y] = 1 - \mathcal{P}[H(\mathbb{X}) > y] = 1 - \mathcal{P}[\mathbb{X} < H^{-1}(y)] = 1 - F(H^{-1}(y)).$$

Zde jsme jednak využili faktu, že aplikujeme-li na nerovnost $H(\mathbb{X}) > y$ inverzi H^{-1}, která je klesající, nerovnost změní znaménko, tj. $H^{-1}(H(\mathbb{X})) = \mathbb{X} > H^{-1}(y)$. Rovnost $\mathcal{P}[H(\mathbb{X}) \geqslant y] = \mathcal{P}[H(\mathbb{X}) > y]$ zase vyplyne z faktu, že distribuční funkce absoluitně spojiých náhodných veličin je vždy spojitá, a tudíž $\mathcal{P}[H(\mathbb{X}) = y] = 0$. Dále stejnou úvahou získáváme rovnost:

$$g(y) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1 - F(H^{-1}(y))\right) = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(H^{-1}(y)) \cdot \frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}y}(y) = -f(H^{-1}(y)) \cdot \frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}y}(y).$$

A protože pro případ ryze klesající transformační funkce je jasné, že derivace $\frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}y}(y)$ jistě záporná, lze oba dílčí výsledky sloučit do kompaktní formule

$$g(y) = f(H^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}y}(y)\right|.$$

5.4.2 Příklad – kvadratická transformace

Nechť má náhodná proměnná $\mathbb{X}$ rovnoměrné rozdělení na intervalu $(1,3)$. Vypočtěme (prozatím bez znalosti předchozí věty), jakou hustotu pravděpodobnosti bude mít proměnná $\mathbb{Y} = X^2$? Máme tedy náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ s rovnoměrným rozdělením na výběrovém prostoru $E = (1,3)$, tedy její hustota pravděpodobnosti je:

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in (1,3)$$

Chceme určit hustotu pravděpodobnosti pro proměnnou $\mathbb{Y} = X^2$?

I. Určení výběrového prostoru $\mathbb{Y}$

Protože $\mathbb{X} \in (1,3)$, pak $\mathbb{Y} = X^2$ nabývá pouze hodnot z intervalu $\tilde{E} = (1^2, 3^2) = (1,9)$.

II. Najdeme distribuční funkci proměnné $\mathbb{Y}$

Distribuční funkce $G(y)$ se definuje jako:

$$G(y) = \mathcal{P}(\mathbb{Y} < y) = \mathcal{P}(\mathbb{X}^2 < y) = \mathcal{P}(\mathbb{X} < \sqrt{y})$$

Známe distribuční funkci proměnné $\mathbb{X}$, která je pro rovnoměrné rozdělení dána jako:

$$F(x) = \mathcal{P}(X < x) = \frac{x-1}{2}, \quad 1 < x < 3.$$

Pro $\mathbb{Y}$ tedy platí:

$$G(y) = \mathcal{P}(\mathbb{X} < \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y}-1}{2}, \quad 1 < y < 9.$$

III. Najdeme hustotu pravděpodobnosti $g(y)$

Derivací distribuční funkce získáme hustotu:

$$g(y) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{4\sqrt{y}}, \quad 1 < y < 9.$$

IV. Závěr

Hustota pravděpodobnosti náhodné proměnná $\mathbb{Y} = X^2$ je:

$$g(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}, \quad 1 < y < 9.$$

V. Řešení aplikací věty o transformaci náhodné proměnné

Náhodná proměnná $\mathbb{X}$ má hustotu pravděpodobnosti $f(x) = \Theta(x-1)\,\Theta(3-x)/2$. Inverzí transformačního vztahu $\mathbb{Y} = H(\mathbb{X}) = \mathbb{X}^2$ je $\mathbb{X} = H^{-1}(\mathbb{Y}) = \sqrt{\mathbb{Y}}$. Funkce $H(x) = x^2$ je výběrovém prostoru $E = (1,3)$ skutečně ryze rostoucí. Proto lze větu o transformaci náhodné proměnné použít. Z ní pak přímo plyne, že

$$g(y) = \frac{\Theta(\sqrt{y}-1)\,\Theta(3-\sqrt{y})}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\sqrt{y}\right) = \Theta(\sqrt{y}-1)\,\Theta(3-\sqrt{y})\frac{1}{4\sqrt{y}} = \Theta(y-1)\,\Theta(9-y)\frac{1}{4\sqrt{y}}.$$

VI. Grafická vizualizace

Pro přehlednost vykreslujeme v obrázku 5.7 hustoty pravděpodobnosti obou zkoumaných proměnných.

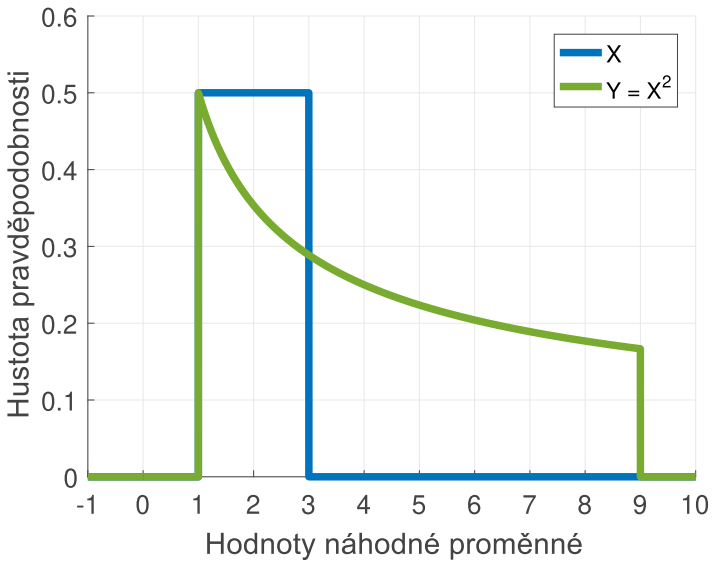

Figure 5.7
Symbolická vizualizace pro porovnání hustot pravděpodobnosti náhodných proměnných $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$.